

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАМСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ИНЖЕНЕРНО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

На правах рукописи

ИСЛАМОВ Камиль Фаритович

ОЦЕНКА НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ
ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК
НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

Специальность 05.23.01 – Строительные конструкции, здания и сооружения

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, профессор Сибгатуллин Э.С.

Набережные Челны 2007

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	4
В1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.....	10
<i>В1.1. Условия прочности в обобщенных напряжениях для пластин и оболочек</i>	<i>10</i>
<i>В1.2. Поверхности текучести для цилиндрических оболочек</i>	<i>13</i>
В2. МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПЛИТ И	
ОБОЛОЧЕК.....	15
<i>В2.1. Определение предельной разрушающей нагрузки для железобетонных оболочек</i>	<i>17</i>
<i>В2.2. Полные решения</i>	<i>20</i>
<i>В2.3. Современные методы расчета несущей способности конструкций.....</i>	<i>26</i>
1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ.....	41
1.1. ПОВЕРХНОСТЬ НАГРУЖЕНИЯ	41
1.2. ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЛО	43
1.3. УСЛОВИЕ ТЕКУЧЕСТИ И ПОВЕРХНОСТЬ ТЕКУЧЕСТИ	45
1.3.1. Выпуклость поверхности текучести	48
1.4. ПРИНЦИП МАКСИМУМА МИЗЕСА И ПОСТУЛАТ ДРУККЕРА. АССОЦИИРОВАННЫЙ ЗАКОН	
ДЕФОРМИРОВАНИЯ.....	51
1.5. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ПРЕДЕЛЬНОМ РАВНОВЕСИИ ТЕЛ	54
1.6. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА МОЩНОСТЕЙ.....	55
1.7. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ	56
1.7.1. Статическая теорема	57
1.7.2. Кинематическая теорема.....	60
1.7.3. Кинематический и статический методы определения несущей способности конструкций.	
Сведение задачи к задаче линейного программирования	62
1.7.4. Пример определения разрушающей нагрузки для железобетонной прямоугольной плиты при	
учете только изгибающих моментов.....	64
2. КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ТОНКИХ АНИЗОТРОПНЫХ И	
КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК.....	67
2.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ.....	67
2.1.1. Условия прочности для материалов в напряжениях.....	67
2.1.2. Краткие сведения об оболочках и пластинах	70
2.2. УРАВНЕНИЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПРОЧНОСТИ ДЛЯ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК	76
2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЕЧЕНИЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ. АЛГОРИТМ А1	80
3. МЕТОД ЖЕСТКИХ ЭЛЕМЕНТОВ И ОБОБЩЕННЫХ ЛИНИЙ РАЗРУШЕНИЯ.....	85
3.1. РЕШЕНИЕ ЯНАСА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ.....	85
3.2. ОРИГИНАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ КИНЕМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ («МЕТОД	
ЖЕСТКИХ ЭЛЕМЕНТОВ И ОБОБЩЕННЫХ ЛИНИЙ РАЗРУШЕНИЯ»)	88
3.3. АЛГОРИТМ МЕТОДА ЖЕСТКИХ ЭЛЕМЕНТОВ И ОБОБЩЕННЫХ ЛИНИЙ РАЗРУШЕНИЯ (АЛГОРИТМ А2).....	106
3.3.1. Подготовка исходных данных для ЭВМ (алгоритм А3).....	109

3.3.2.	Определение коэффициентов в соотношениях задачи линейного программирования.....	113
3.3.3.	Построение кратчайшей плоской линии разрушения на поверхности оболочки с заданной точностью. Алгоритм А4.....	116
3.3.4.	Преобразование равномерно распределенной вертикальной нагрузки. Алгоритм А5.....	120
4.	РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ АНАЛИЗ	124
4.1.	О ДОСТОВЕРНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ	124
4.1.1.	Прямоугольная пластина	124
4.1.2.	Получение сечений гиперповерхности прочности	128
4.1.3.	Круглая пластина и сферическая оболочка с малой стрелой подъема.....	130
4.1.4.	Определение несущей способности полусферического купола	133
4.1.5.	Определение несущей способности цилиндрической оболочки.....	144
4.2.	ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗРУШАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОГО КУПОЛА С ВЫРЕЗАМИ	151
4.2.1.	Исходный вариант задачи.....	151
4.2.2.	Вариант усиления купола уменьшением шага арматуры	166
4.2.3.	Вариант усиления купола увеличением диаметра арматуры	175
4.2.4.	Вариант с жестким защемлением в опоре	184
4.2.5.	Вариант с вертикальной нагрузкой (шарнирное опирание)	187
4.2.6.	О рациональном армировании конструкции.....	190
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	195
	ЛИТЕРАТУРА.....	197

Введение

Оболочки и плиты, среди других типов конструкций в строительстве, занимают одну из наиболее значимых мест, обеспечивая функции перекрытия и покрытия пролетов в зданиях и сооружениях. Являясь экономичным по расходу материала типом конструкций, они применялись еще со времен древнего Рима и с успехом применяются в наши дни, обеспечивая рациональное расходование материала.

В сочетании с возможностями композитных материалов, оболочки и плиты способствуют решению проблемы перекрытия пролетов различной конфигурации в плане в наименее металлоемком исполнении.

Большинство существующих в настоящее время способов расчета оболочек и плит произвольной конфигурации сходятся на методе конечных элементов, обеспечивающим определение размеров элементов (или проверку несущей способности) не выходя за рамки упругого расчета. Существующий на сегодняшний день ряд программного обеспечения для расчета пространственных сооружений и конструкций, основан на методе конечных элементов [34], где вся конструкция, будучи сплошным телом, разбивается на отдельные элементы, взаимодействующие между собой только в отдельных точках, в которых вводятся фиктивные силы, эквивалентные поверхностным напряжениям, распределенным по границам элементов. В этом случае вся задача расчета сводится к задаче строительной механики, которая может быть решена численно.

Определение несущей способности различных оболочек и плит, с учетом пластических деформаций, производится с использованием различных условий прочности в обобщенных напряжениях, а также с применением теорем предельного равновесия.

Теория оболочек в настоящее время представляет собой хорошо развитый и продолжающий развиваться раздел механики. Результаты фундаментального и прикладного характера изложены в ряде обобщающих монографий, например, в работах Х.М. Муштари, К.З. Галимова, В.В. Новожилова, С.А. Амбарцумяна, А.Л. Гольденвейзера, Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко, Н.В. Валишвили, М.С. Корнишина, И.Г. Терегулова и др. Механике тонкостенных конструкций посвятили свои

работы также Н.П. Абовский, А.В. Александров, Н.А. Алфутов, И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий, А.И. Андреев, Н.П. Андреев, В.Е. Вериженко, Ю.И. Виноградов, В.З. Власов, А.С. Вольмир, И.И. Ворович, Н.С. Ганеев, М.С. Ганеева, Л.А. Гордон, А.Г. Горшков, Э.И. Григолюк, А.С. Григорьев, А.П. Деруга, Л.Г. Доннел, М.А. Ильгамов, В.В. Кабанов, А.В. Кармишин, Ю.Г. Коноплев, В.И. Королев, Э.Э. Лавендел, Б.Я. Лащенко, И.Ф. Образцов, П.М. Огибалов, В.Н. Паймушин, В.В. Петров, А.В. Погорелов, Я.С. Подстригач, А.П. Прусаков, В.Г. Пискунов, Г.И. Пшеничных, А.В. Рассказов, Э. Рейсснер, Р.Б. Рикардс, А.В. Саченков, А.Д. Смирнов, А.Г. Угодчиков, С.П. Тимошенко, В.И. Феодосьев, А.П. Филин, К.Ф. Черных, Н.Н. Шапошников и др.

Развитием методов расчета оболочек занимались, кроме вышеперечисленных, такие ученые, как Э.Л. Аксельрад, Ю.П. Артюхин, В.Г. Баженов, З.И. Бурман, Д.В. Вайнберг, Н.В. Валишвили, А.И. Голованов, А.С. Городецкий, А.И. Гузь, В.И. Гуляев, Ю.П. Жигалко, А.К. Ибраев, В.А. Иванов, В.В. Кабанов, Б.Я. Кантор, В.И. Климанов, Н.В. Колкунов, В.А. Крысько, Ю.В. Липовцев, А.М. Масленников, Б.А. Куранов, В.И. Мяченков, Б.Е. Победря, В.А. Постнов, В.В. Рогалевич, Л.А. Розин, Л.М. Савельев, Я.Г. Савула, А.С. Сахаров, М.Н. Серазутдинов, В.С. Сипетов, Н.Н. Столяров, Х.С. Хазанов, Н.И. Шапошников, Н.М. Якупов, С. Атлури, К. Бате, Д.В. Клаф, Р. Галлагер, Л. Марлей, Т. Пиан, О.С. Зенкевич, Дж. Оден и др.

Теории расчета многослойных оболочек посвящена весьма обширная литература, обзор которой проводили А.К. Галиныш, Ф.А. Коган, А.А. Дудченко, С.А. Лурье, И.Ф. Образцов, С.А. Амбарцумян, В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков, В.В. Васильев, Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов, Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко, Г.П. Голуб, Ю.В. Немировский, Б.С. Резников, В.В. Пикуль, А.И. Голованов, В.Е. Чепига, Л.П. Хорошун, С.В. Козлов, Ю.А. Иванов, И.К. Кошевой и др.

Проблемы теории пластичности и ползучести изучены в настоящее время глубоко. Большой вклад сделан такими учеными как Р.А. Арутюнян, А. Балтов, Г.И. Быковцев, Р.А. Васин, А.А. Вакуленко, М.А. Греков, А.А. Гвоздев, Г. Гринберг, Х. Гейрингер, А.С. Григорьев, А. Грин, О.Ю. Динариев, А.С. Дехтярь, Д. Друккер, М.И. Ерхов, Л.В. Ершов, В.Г. Зубчанинов, А.А. Ильюшин, Г.В. Иванов, Д.Д. Ивлев,

А.Ю. Ишлинский, Ю.И. Кадашевич, Г. Казинчи, Л.М. Качанов, Р.А. Каюмов, В.Д. Ключников, Д. Коларов, В. Койтер, В.С. Ленский, Ю.Р. Лепик, Я.А. Леллеп, Р.М. Мансуров, Р. Мусс, А.А. Марков, Н.Н. Малинин, Р. Мизес, А.Б. Мосолов, В.П. Мясников, Ю.В. Немировский, В.В. Новожилов, В. Олышак, Е. Онат, Б.Е. Победря, А.А. Позднеев, А.М. Проценко, В. Прагер, Ю.Н. Работнов, А.Р. Ржаницын, В.И. Розенблюм, Я. Рыхлевский, Л.Н. Сараев, А. Савчук, В.В. Соколовский, Л.А. Толоконников, И.Г. Терегулов, П.В. Трусов, С.М. Фейнберг, А. Фрейденталь, Ф. Ходж, Р. Хилл, А.А. Чирас, О.Н. Шаблий, Г.С. Шапиро, С.А. Шестериков и др.

Развитием теории железобетонных конструкций в разное время занимались Н.А. Абрамов, С.В. Александровский, К.К. Антонов, М.Х. Арутюнян, В.Н. Байков, А.В. Бенин, О.Я. Берг, Г.И. Бердический, В.М. Бондаренко, М.С. Боршанский, В.А. Бушков, А.П. Васильев, П.И. Васильев, В.С. Верещагин, Б.Г. Веснин, В.З. Власов, А.А. Гвоздев, Ю.П. Гуща, С.С. Давыдов, С.С. Давыдов, С.А. Дмитриев, П.Ф. Дроздов, С.И. Дружинин, Б.Н. Жемочкин, А.С. Залесов, В.П. Золотарев, К.Н. Илленко, Н.И. Карпенко, В.И. Колчунов, А.П. Коровкин, Г.Г. Кривошеин, С.М. Крылов, А.П. Кудзис, А.Ф. Лолейт, Й.Й. Лучко, Р.Л. Манлян, А.Ф. Милованов, С.А. Миронов, В.В. Михайлов, Н.И. Молотнилов, В.М. Москвин, В.И. Мурашев, В.П. Некрасов, А.А. Оатул, А.М. Овечкин, А.П. Павлов, Н.Я. Панарин, П.Л. Пастернак, Г.П. Передерня, В.В. Пинаджян, И.С. Подольский, Н.Н. Попов, Г.И. Попов, И.М. Рабинович, К.В. Сахновский, Ю.Р. Седых, С.Н. Семененок, Э.Е. Сигалов, Н.Н. Складнев, Б.С. Соколов, Я.В. Столяров, А.Э. Страус, М.С. Торяник, И.А. Трифонов, И.И. Улицкий, Г.К. Хайдуков, Г.Н. Шоршнев, В.В. Шугаев, М.А. Эпштейн, В. Doran, Luo Zhilin и др.

Цель и задачи исследования:

Целью работы является разработка методики определения несущей способности тонких (армированных и неармированных) пластин и оболочек на основе модифицированного варианта кинематического метода. Методика должна позволять определять минимальное значение верхней оценки разрушающей нагрузки при следующих особенностях задач:

- оболочки и пластины могут иметь сложную геометрическую форму, в том числе – изломы по некоторым линиям, внутренние и внешние (около краев) вырезы. Линии излома, вырезы имеют произвольный характер;

- допускаются к рассмотрению всевозможные условия опирания оболочек и пластин;

- внешняя статическая нагрузка может иметь произвольную конфигурацию;

- в общем случае должна учитываться работа всех внутренних силовых факторов в рассматриваемых сечениях оболочек и пластин;

- на характер армирования материала накладываются минимальные ограничения.

Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:

- построить уточненные кривые прочности для армированных тонких пластин и оболочек;

- разработать соответствующие алгоритмы и программы для реализации разработанной методики;

- провести численные эксперименты, осуществить их критический анализ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, где приведен и обзор литературы по теме, 4 разделов, заключения и списка литературы.

Первый раздел работы содержит основные положения теории предельного равновесия жестко-пластического тела, на которых базируется диссертационная работа. Кратко описаны такие основные понятия и принципы, как поверхность нагружения, жесткопластическая модель деформируемого твердого тела, поверхность текучести, выпуклость поверхности нагружения, принцип максимума Мизеса и постулат Друккера, ассоциированный закон деформирования. Приведены основные математические соотношения задачи о предельном равновесии тел; содержания статической и кинематической теорем об экстремальных свойствах предельных состояний деформирования, впервые сформулированных и доказанных, в достаточно общем виде, А.А. Гвоздевым. На этих теоремах базируются статический и кинематический методы теории предельного равновесия, которые позволяют

определять, соответственно, нижнюю и верхнюю оценки для разрушающей внешней нагрузки. С целью улучшения этих оценок рассматриваемые соответствующие задачи сводятся к стандартной задаче линейного программирования. Приведен пример определения минимальной верхней оценки разрушающей нагрузки для прямоугольной железобетонной плиты при учете работы только внутренних изгибающих моментов.

Второй раздел работы посвящен критериям прочности и пластичности для тонких анизотропных и композитных пластин и оболочек. Приведены краткие сведения о некоторых известных условиях прочности (в напряжениях) для изотропных и анизотропных материалов, а также краткие сведения о тонких оболочках и пластинах.

Приведены параметрические уравнения гиперповерхности прочности для композитных оболочек и плит, полученные Э.С. Сибгатуллиным. Приведена методика получения сечений этих гиперповерхностей координатными плоскостями. Разработан алгоритм А1, позволяющий успешно преодолевать трудности, связанные с получением этих сечений. Реализована соответствующая программа для ЭВМ, с использованием которой можно, с удовлетворительной точностью, построить искомые сечения гиперповерхности. Приведен способ, позволяющий аппроксимировать плоские участки и участки с малой кривизной гиперповерхности.

В третьем разделе диссертации разрабатывается оригинальный метод жестких элементов и обобщенных линий разрушения (МЖЭиОЛР). Этот метод является вариантом кинематического метода теории предельного равновесия и развитием метода цилиндрических шарниров текучести для пластин, линий сосредоточенных пластических деформаций для оболочек, предложенных в работах А.Р. Ржаницына, метода обобщенных линий текучести, развитого М. Янасом. Приведен алгоритм А2 реализации соответствующего метода. Разработан алгоритм А3 подготовки исходных данных для реализации МЖЭиОЛР. Предложен алгоритм А4 и реализована соответствующая программа для ЭВМ, позволяющие численное построение (с заданной точностью) кратчайшей плоской линии между двумя рассматриваемыми

точками O_1 и O_2 на поверхности S_0 . Разработан способ (алгоритм А5) аппроксимации равномерно распределенной вертикальной нагрузки на диск, граничащий с четырьмя линиями разрушения, позволяющий автоматизировать (с заданной точностью) определение коэффициентов для задачи линейного программирования (метод позволяет работать с четырехугольниками, стороны которых являются кривыми линиями).

В четвертом разделе диссертации приведены некоторые результаты расчетов, проведенных с использованием разработанных и описанных в предыдущих разделах теории, алгоритмов и соответствующих программ для ЭВМ, анализ этих результатов. Значительное внимание уделено подтверждению достоверности получаемых численных результатов.

Представлены результаты расчетов и их сравнения с соответствующими экспериментальными или аналитическими результатами других авторов следующих конструкций:

- стальной круглой пластины, шарнирно опертой по контуру и нагруженной в центре сосредоточенной силой;
- полукруглой цилиндрической оболочки, нагрузка – вертикальная, равномерно распределенная по горизонтальной проекции оболочки;
- железобетонного полусферического купола, свободно опертого по экватору и нагруженного сосредоточенной силой, приложенной на полюсе и др.

Произведен расчет несущей способности сферической железобетонной оболочки с вырезами, представлено несколько вариантов нагружения и опирания, несколько вариантов армирования. Проанализирована зависимость величины верхней оценки разрушающей нагрузки, схемы разрушения и скоростей диссипации внутренней энергии от вариантов армирования, нагружения и опирания.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы.

На защиту выносятся следующие результаты диссертации:

- новая уточненная методика определения несущей способности тонких пластин и оболочек;
- метод уточнения предельных кривых для армированных материалов;

- алгоритмы и программы для ЭВМ, позволяющие решать задачи определения несущей способности тонких пластин и оболочек и допускающие возможность учета широкого спектра исходных данных и условий рассматриваемых задач; численные эксперименты, полученные с использованием этих алгоритмов и программ и демонстрирующие их возможности.

Публикации. По теме исследований опубликовано 11 печатных работ. В автореферате приводится список публикаций, содержащий 11 наименований.

Диссертационная работа выполнялась на кафедре «Технология строительного производства» Камской государственной инженерно-экономической академии в соответствии с планом научно-исследовательских работ академии. Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Эмеру Сулеймановичу Сибгатуллину за постоянное внимание, сотрудничество и помощь в решении рассматриваемых в диссертации проблем.

В1. Обзор литературы

В создание основ теории пластичности и общих методов расчета конструкций с учетом пластических свойств материалов внесли вклад такие ученые, как И.А. Биргер, А.А. Гвоздев, Д.Д. Ивлев, А.А. Ильюшин, А.Ю. Ишлинский, Ю.Н. Работнов, А.Р. Ржаницын, В.В. Соколовский, Д. Друккер, Г. Казинчи, В. Прагер, Р. Хилл, Ф. Ходж и другие.

Основные достижения в решении задач с учетом пластических свойств тонкостенных конструкций связаны с работами И.А. Биргера, А.С. Григорьева, М.И. Ерхова, А.А. Ильюшина, Ю.Н. Работнова, А.Р. Ржаницына, И.Г. Терегулова, И.С. Цуркова, Э. Оната, В. Прагера, Ф. Ходжа и других.

В1.1. Условия прочности в обобщенных напряжениях для пластин и оболочек

Поскольку уравнения теории оболочек формулируются в обобщенных силах и обобщенных перемещениях, условия прочности целесообразно формулировать также в обобщенных силах (обобщенных напряжениях). В работе [64] отмечено,

что преобразование условия прочности из пространства напряжений в пространство обобщенных напряжений составляет одну из важнейших задач теории о предельных состояниях оболочек и пластин.

Впервые для тонких оболочек и пластин уравнение предельной гиперповерхности в обобщенных напряжениях – внутренних силах и моментах вывел А.А. Ильюшин [36], используя условие пластичности Р. Мизеса и соотношения теории малых упругопластических деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{4}T_1 &= \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 \right) J_1 - \left(\varkappa_1 + \frac{1}{2}\varkappa_2 \right) J_2, \\ \frac{3}{4}T_2 &= \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 \right) J_1 - \left(\varkappa_2 + \frac{1}{2}\varkappa_1 \right) J_2, \\ \frac{3}{2}T_{12} &= \varepsilon_{12}J_1 - \varkappa_{12}J_2; \\ \frac{3}{4}M_1 &= \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 \right) J_2 - \left(\varkappa_1 + \frac{1}{2}\varkappa_2 \right) J_3, \\ \frac{3}{4}M_2 &= \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 \right) J_2 - \left(\varkappa_2 + \frac{1}{2}\varkappa_1 \right) J_3, \\ \frac{3}{2}M_{12} &= \varepsilon_{12}J_2 - \varkappa_{12}J_3; \end{aligned} \right\}; \quad (B1.1.1)$$

Здесь $J_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} dz$, $J_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z dz$, $J_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z^2 dz$,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{\Delta} (S_1 J_3 - H_1 J_2), \quad \varkappa_1 = \frac{1}{\Delta} (S_1 J_2 - H_1 J_1), \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{\Delta} (S_2 J_3 - H_2 J_2), \quad \varkappa_2 = \frac{1}{\Delta} (S_2 J_2 - H_2 J_1), \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{\Delta} (S_{12} J_3 - H_{12} J_2), \quad \varkappa_{12} = \frac{1}{\Delta} (S_{12} J_2 - H_{12} J_1), \\ \Delta &= J_1 J_3 - J_2^2. \end{aligned} \right\};$$

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \varepsilon_1 J_1 - \varkappa_1 J_2, \\ S_2 &= \varepsilon_2 J_1 - \varkappa_2 J_2, \\ S_{12} &= \varepsilon_{12} J_1 - \varkappa_{12} J_2, \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} H_1 &= \varepsilon_1 J_2 - \varkappa_1 J_3, \\ H_2 &= \varepsilon_2 J_2 - \varkappa_2 J_3, \\ H_{12} &= \varepsilon_{12} J_2 - \varkappa_{12} J_3. \end{aligned} \right\}.$$

При этом, кроме гипотез Кирхгоффа-Лява, предполагается условие несжимаемости материала. Полученные А.А.Ильюшиным соотношения имеют довольно сложный

вид и затруднительны при решении практических задач.

В дальнейшем рядом авторов предпринимались попытки упрощения получаемых гиперповерхностей для пластин и оболочек.

Е. Онат и В. Прагер [137] получили уравнения предельной гиперповерхности для оболочек вращения на основе условия пластичности Треска–Сен-Венана.

Для упрощения гиперповерхности для оболочек Ю.Н. Работновым [76] была использована слоистая модель сечения однородной оболочки. Эту же модель В.И. Розенблюм применил для аппроксимации сечения однородной оболочки двухслойным сечением [83, 84, 85]. В дальнейшем этот подход и его различные варианты (применительно к условиям работы рассматриваемых конструкций) были использованы при решении различных задач различными авторами. М.И.Ерхов получил конечное соотношение между внутренними силами и моментами в пластическом состоянии в предположении, что в пластической области конструкции интенсивность деформации постоянна [30]. Он использовал двухслойную модель сечения в сочетании с условием текучести Треска для исследования предельного состояния цилиндрической оболочки [32].

Ф.Ходж предложил приближенное условие пластичности (исходным условием является условие пластичности Треска), учитывающее влияние сил, моментов, но не учитывающее их взаимного влияния [129].

И.Г. Терегулов использовал двухслойную модель сечения оболочки вращения при исследовании предельного состояния замкнутой в вершине оболочки вращения (исходным условием является условие Мизеса) [95].

Условия прочности для анизотропных оболочек получены в работах М.Ш.Микеладзе [48], В.Ольшака и А.Савчука [136], Савчука [86]. Уравнения отдельных частей предельной гиперповерхности для оболочек вращения в параметрическом виде получены в [14]. Г.С.Шапиро в [86] построил поверхность прочности с учетом влияния перерезывающих сил на условие прочности.

Савчук в [64], используя тензорное уравнение, связывающее напряжения σ_{ij} , деформации ε_{ij} , их производные по времени $\dot{\sigma}_{ij}$, $\ddot{\sigma}_{ij}$, ..., $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\ddot{\varepsilon}_{ij}$, ..., температуру T и время t (в случае учета истории деформирования)

$$f(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}, \ddot{\sigma}_{ij}, \dots, \varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \ddot{\varepsilon}_{ij}, \dots, T, t) = 0, (i, j = 1, 2, 3),$$

уравнения для результирующих усилий и моментов, приводящих напряженное состояние оболочки толщиной $2H$ к состоянию на ее срединной поверхности

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-H}^H \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-H}^H \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3, \quad Q_\alpha = \int_{-H}^H \sigma_{\alpha 3} dx_3,$$

а также соотношения, связывающие удлинения $\lambda_{\alpha\beta}$ и кривизны $\varkappa_{\alpha\beta}$ срединной поверхности $\varepsilon_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} + x_3 \cdot \varkappa_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha 3} = 0$, получил следующие зависимости между результирующими силами и деформациями срединной поверхности оболочки:

$$N_{\alpha\beta} = (\lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}) I_1 + (\varkappa_{\alpha\beta} + \varkappa_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}) I_2,$$

$$M_{\alpha\beta} = (\lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}) I_2 + (\varkappa_{\alpha\beta} + \varkappa_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}) I_3,$$

где $I_s = \sigma_0 \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \int_{-H}^H (e_{ij} e_{ij})^{1/2} x_3^{s-1} dx_3, s = 1, 2, 3.$

В работе [56] на основе кусочно-линейного условия прочности армированного слоя для оболочек регулярно-однородного строения Немировским Ю.В. получены предельные поверхности в пространстве обобщенных напряжений, образованные пересечением ряда гиперповерхностей. Им же построены предельные гиперповерхности на основе нелинейного условия прочности армированного слоя [55], также образованные пересечением ряда гиперповерхностей.

В1.2. Поверхности текучести для цилиндрических оболочек

Как отмечено в [64], размеры поверхности текучести железобетонной оболочки зависят от сжимающего усилия в бетоне, предела текучести арматуры и доли армирования. Форма поверхности текучести зависит от условия разрушения бетона при сложном напряженном состоянии. Предполагая, что условие разрушения бетона при плоском напряженном состоянии имеет вид

$$\sigma_\alpha = \left\{ \begin{array}{c} R_c \\ -R_t \end{array} \right\}, -R_t \leq \sigma_\beta \leq R_c, \alpha, \beta = 1, 2 \quad (\text{В1.2.1})$$

(его можно считать приемлемым описанием действительного поведения бетона), где R_c и R_t – сжимающие и растягивающие усилия соответственно, Савчук и Ольшак [140] определили поверхность текучести для цилиндрических железобетонных

оболочек (см. также Савчук и Кёниг [142]). Соответствующие уравнения поверхности текучести записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} m_x(1 + \alpha) + 2n_x^2 + 2n_x(2\beta\mu_x + \alpha - 1) + 2\beta^2\mu_x^2 - 4\beta\mu_x - 2\alpha &= 0, \\ -m_x(1 + \alpha) + 2n_x^2 + 2n_x(\alpha - 1) - 2\alpha &= 0, \\ n_\varphi - \alpha - \beta\mu_\varphi &= 0, \\ -n_\varphi - 1 &= 0, \end{aligned} \tag{B1.2.2}$$

где $m=M/M_0$; $n=N/N_0$; $M_0=R_cBH^2$; $N_0=2R_cBH$; $\alpha=R_t/R_c$; $\beta=\sigma_0/R_c$; $\mu_x=A/2BH$; A — площадь сечения арматуры; $2H$ — толщина оболочки; B — ширина элемента оболочки. Если гиперповерхность (B1.2.2) представляет собой потенциальную поверхность соответствующих скоростей деформации, то можно получить полное решение задачи предельного равновесия. На рис. B1.1 в пространстве безразмерных результирующих напряжений (для $\alpha=0$, $\beta=0,15$ и $\mu=0$) приведена типичная поверхность текучести для цилиндрических оболочек. Кривая взаимодействия окружного усилия n_φ и осевого момента m_x является прямоугольником, как показано на рис. B1.1 ($KLMN$ — прямоугольник взаимодействия для цилиндрических оболочек без концевых нагрузок).

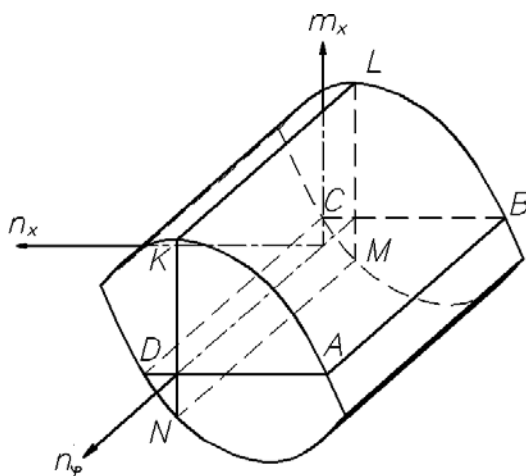


Рис. B1.1

В зависимости от изменения нагрузки вдоль образующих возникает либо полное, либо частичное разрушение оболочки. Следует отметить, что, как правило, разрывные поля напряжений сопровождают разрушение оболочки.

В2. Методы теории предельного равновесия для определения несущей способности плит и оболочек

Как известно, полное решение задачи о несущей способности конструкции состоит из определения а) предельной (разрушающей) нагрузки, т.е. величины нагрузки, необходимой для превращения конструкции в механизм, имеющий, как минимум, одну степень свободы, б) поля скоростей перемещений, в) поля напряжений. Для сложных конструкций (элементов конструкций), какими являются пластины и оболочки, получение полных решений с использованием точных методов анализа является трудной задачей и получение замкнутых решений для большинства задач, интересных с точки зрения практики, приводит к большим математическим трудностям. Вследствие этого приходится привлекать приближенные методы решения, которые основываются на двух фундаментальных теоремах, впервые сформулированных и доказанных, как отмечено в [91], А.А.Гвоздевым [17]. Эти теоремы об экстремальных свойствах нагрузок, называемые также теоремами о границах несущей способности, впоследствии переоткрывались С.М.Фейнбергом [106], Д. Друккером, Х. Гринбергом и В. Прагером [124], Р. Хиллом [127]. Так называемые "статический" и "кинематический" методы теории предельных состояний, основанные на этих теоремах, дают соответственно нижнюю и верхнюю оценки для разрушающей нагрузки. Хотя полное решение задачи подразумевает использование обоих методов, но каждый из методов по отдельности также представляет интерес.

Статический метод для определения нижней оценки предельной нагрузки использован в работах [137, 119, 118, 49, 70, 117, 75, 22, 23] и др., а кинематический метод для определения верхней оценки – в работах [137, 77, 119, 75, 88, 118, 31] и др.

Для улучшения этих оценок широко используются различные методы минимизации функций.

В некоторых работах верхняя и нижняя оценки получаются на основе интуитивно принятых полей скоростей перемещений и напряжений (без минимизации)

[137], или задаются с точностью до некоторых параметров или функций, количество которых невелико и значения которых определяются, используя традиционные методы минимизации функций [77]. При таком подходе существенную роль играет информация, предварительно полученная из эксперимента. В работе Е. Оната и В. Прагера [137] из условия равенства мощностей внутренних и внешних сил непосредственно определяется верхняя граница для разрушающей нагрузки. Исходя из статически допустимого поля напряжений, непосредственно определяется нижняя оценка. В работе [77] А.Р. Ржаницына кинематически возможное поле скоростей задается с точностью до некоторых параметров или функций.

Кинематический метод теории предельных состояний с использованием аппарата линейного программирования (ЛП) применялся в работах [78, 51, 75, 87, 8, 31] и др. Методика, используемая в работе [78] А.Р. Ржаницына аналогична той, которая применялась в его работе [77]. Но здесь, благодаря использованию аппарата ЛП и электронно-вычислительных машин (ЭВМ), количество параметров, описывающих механизм разрушения конструкции, может быть существенно увеличено. В работе [51] Ю.А. Наглявичуса и А.А. Чираса на основе экстремальных энергетических принципов дана математическая модель задачи о предельном состоянии. Показана возможность сведения этой задачи к задаче линейного программирования. В работе [75] А.Р. Ржаницына для улучшения верхней оценки разрушающей нагрузки для цилиндрических сводов-оболочек использовано параметрическое линейное программирование. Другой подход имеет место в работе [87], где для оценки разрушающей нагрузки для арочной плотины дискретизация задачи осуществлена конечно-разностным методом, значения скорости диссипации в дискретных областях принимаются как неотрицательные переменные задачи ЛП, на них накладываются ограничения, вытекающие из принципа максимума Мизеса. Аналогичный прием пошагово использован в работе [31] для определения верхней оценки разрушающей нагрузки для гибких ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек, когда деформации не могут считаться малыми.

Другие методы улучшения верхней оценки разрушающей нагрузки использо-

ваны в работах [119,65, 118, 10] и др. В работе [65] Э. Палмера описано использование метода динамического программирования при определении наименьшей верхней границы предельной нагрузки для осесимметричных оболочек.

Следует отметить также работу [135], где разрушающая нагрузка представлена функцией от предела прочности материала и геометрических размеров сечения, вероятные значения и средние погрешности которых определяются методами математической статистики. В этой работе отмечается, что повышения предельных нагрузок и связанной с этим экономии следует добиваться не за счет повышения прочности, а за счет повышения надежности (однородности) материалов.

В2.1. Определение предельной разрушающей нагрузки для железобетонных оболочек

Метод, использованный в работе [64], основан на статической и кинематической теоремах предельного равновесия, применимых только к однопараметрическому нагружению. Чтобы получить какую-либо нижнюю нагрузку p_s , характеризуемую множителем $\mu_s = p_s / p_0$, где p_0 определена как единичная нагрузка, необходимо найти поле напряжений $M_{\alpha\beta}^0(\mu_s p_0)$, $N_{\alpha\beta}^0(\mu_s p_0)$, которое удовлетворяет уравнениям равновесия и граничным условиям в напряжениях и при котором не нарушается соответствующее условие текучести. Таким образом,

$$F[M_{\alpha\beta}^0(\mu_s p_0), N_{\alpha\beta}^0(\mu_s p_0)] \leq k^n. \quad (\text{B2.1.1})$$

Поскольку $M_{\alpha\beta}$ и $N_{\alpha\beta}$ линейны по μp_0 , а F — однородная функция (скажем, порядка n) напряжений, получаем, что

$$\mu_s^n F(N_{\alpha\beta}^0, M_{\alpha\beta}^0) \leq k^n. \quad (\text{B2.1.2})$$

Следовательно, наилучшая нижняя граница равна

$$\mu_s^n = \max \frac{k^n}{F(N_{\alpha\beta}^0, M_{\alpha\beta}^0)}. \quad (\text{B2.1.3})$$

Это решение обеспечивает получение нижней границы для разрушающей нагрузки.

Чтобы получить какую-либо верхнюю границу $\mu_k p_0$ разрушающей нагрузки,

в [64] применен принцип сбалансирования скорости диссипации внутренней энергии с мощностью внешних сил. Поскольку любая виртуальная форма разрушения удовлетворяет требованиям, налагаемым на механизм разрушения, очень полезным средством получения оценок верхней границы служит принцип виртуальных скоростей. Если \dot{u}_i^* ($i = 1, 2, 3$) — поле виртуальных скоростей, то из соответствующих соотношений между деформациями и перемещениями можно определить скорости удлинений $\dot{\lambda}_{\alpha\beta}^*$ и кривизн $\dot{\mathfrak{x}}_{\alpha\beta}^*$ срединной поверхности оболочки. Из принципа виртуальных скоростей следует:

$$\mu_k \int_A p_{0i} \dot{u}_i^* dA \geq \int_A (M_{\alpha\beta} \dot{\mathfrak{x}}_{\alpha\beta}^* + N_{\alpha\beta} \dot{\lambda}_{\alpha\beta}^*) dA. \quad (\text{B2.1.4})$$

Если величины $M_{\alpha\beta}$ и $N_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условию текучести, а $\dot{\mathfrak{x}}_{\alpha\beta}^*$ и $\dot{\lambda}_{\alpha\beta}^*$ соответствующим скоростям течения, то в правой части (B2.1.4) будут содержаться только скорости деформаций. Соотношение (B2.1.4) приводит к наилучшей верхней границе

$$\mu_k = \min_A \frac{\int_A (M_{\alpha\beta} \dot{\mathfrak{x}}_{\alpha\beta}^* + N_{\alpha\beta} \dot{\lambda}_{\alpha\beta}^*) dA}{\int_A p_{0i} \dot{u}_i^* dA}. \quad (\text{B2.1.5})$$

Если в неравенстве (B2.1.4) компоненты тензоров результирующих напряжений заменить величинами $M_{\alpha\beta} = M\delta_{\alpha\beta}$ и $N_{\alpha\beta} = N\delta_{\alpha\beta}$, то действительная гиперповерхность текучести заменится приближенной, которая будет описанной. Здесь M и N — постоянные, величина которых выбирается так, чтобы приближенная поверхность огибала точную поверхность текучести. Тогда соотношение (B2.1.5) принимает особенно простую форму для приложений и верхняя граница оценивается следующим образом:

$$\mu_k = \frac{M \int_A |\dot{\mathfrak{x}}_{\alpha\alpha}^*| dA + N \int_A |\dot{\lambda}_{\alpha\alpha}^*| dA}{\int_A p_{0i} \dot{u}_i^* dA}. \quad (\text{B2.1.6})$$

Эта формула из [64] является основной для кинематического метода оценки разрушающей нагрузки железобетонных оболочек. Если возможная форма разрушения оболочки состоит из жестких элементов, ограниченных пластическими зонами, то

числитель в (B2.1.5) оценивается путем интегрирования вдоль зон, в которых поле скоростей перемещений претерпевает разрыв.

Для сферической шарнирно опертой крышки с главным радиусом кривизны R (φ_0 – половина угла раствора крышки), нагруженной равномерным давлением μp_0 , в [64] приведена верхняя оценка разрушающей нагрузки:

$$p_k = \frac{2N_0}{R} + \frac{2M_0}{R^2} \frac{\sin^2 \varphi_0}{2 - 2\cos^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi_0} = \frac{2N_0}{R} \left(1 + \frac{2H}{R} \right). \quad (\text{B2.1.7})$$

На рис. B2.1 приведены значения разрушающих нагрузок для сферической крышки с большим углом раствора, полученные с использованием теорем предельного равновесия: статической (линия 2) и кинематической (линия 1). Графики взяты из [128].

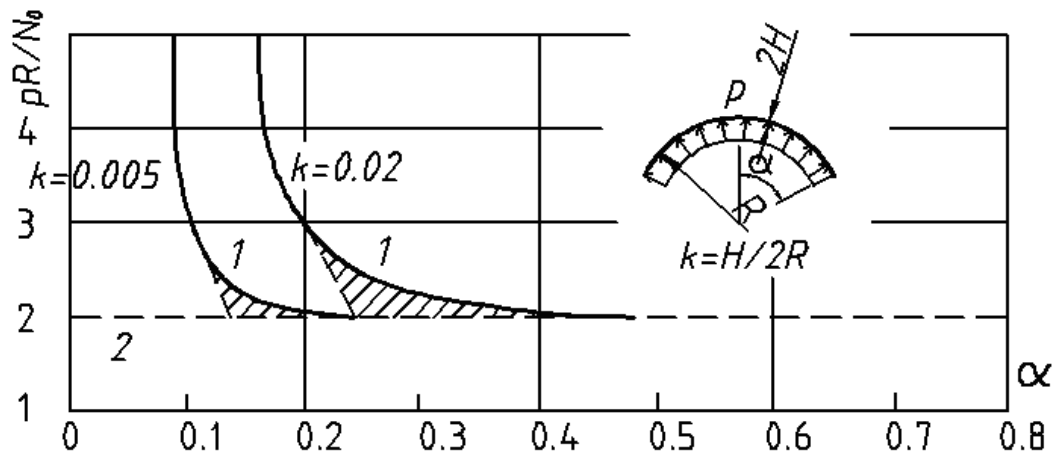


Рис. B2.1

В2.2. Полные решения

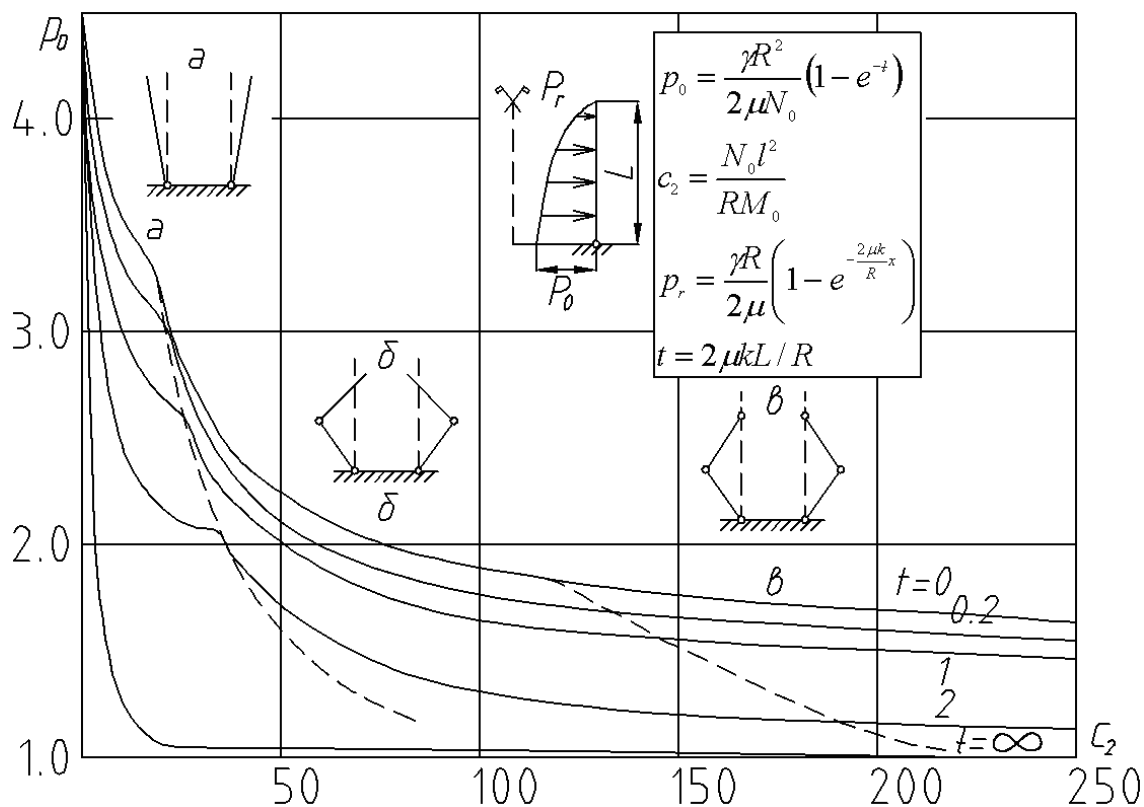


Рис. В2.2

Применение уравнений поверхности текучести (В1.1.2) и ассоциированного закона текучести позволило получить полные решения задач о предельном равновесии для цилиндрических оболочек, подверженных давлению среды с плотностью γ , коэффициентом μ трения о стенки и коэффициентом k внутреннего трения [142]. Результирующие кривые разрушающей нагрузки в зависимости от геометрических параметров оболочки показаны на рис. В2.2 (а – короткая оболочка; б – форма разрушения со сжатым кольцом; в – частичное разрушение длинных оболочек; «----» – линии раздела форм разрушения). На рисунке приведены возможные формы разрушения. Линейность форм разрушения в координатной системе, совпадающей с системой координат главных направлений, наводит на мысль, что при более сложной геометрии они будут также линейны. При правильном выборе формы линейного разрушения кинематическое решение для предельной нагрузки (верхняя граница) может быть точным или близким к действительной величине интенсивности разрушающей нагрузки. Разрушающие нагрузки для цилиндрических резервуаров определены в работе [140].

Для железобетонных оболочек с более сложной геометрией приближенные решения можно получить путем введения *дополнительных предположений о поле напряжений*, делающих возможным интегрирование уравнений текучести и равновесия, или путем применения принципа виртуальных скоростей к упрощенным полям напряжений. Решения, полученные таким способом, имеют особенности, общие как для статического, так и для кинематического методов оценки разрушающих нагрузок.

Кализский [134] изучал разрушение усеченного конуса, подобного применяемому для фундаментов высоких башен. Его анализ базируется на предположении, что окружной изгибающий момент не вносит вклада в диссипацию внутренней энергии (таким образом, $m_\varphi \dot{\alpha}_\varphi = 0$) и что форма разрушения — коническая, как показано на рис. В2.3 (1 — жесткая крышка; 2 — сечение; 3 — вид сбоку). Получающийся механизм разрушения зависит от одного параметра R_0 .

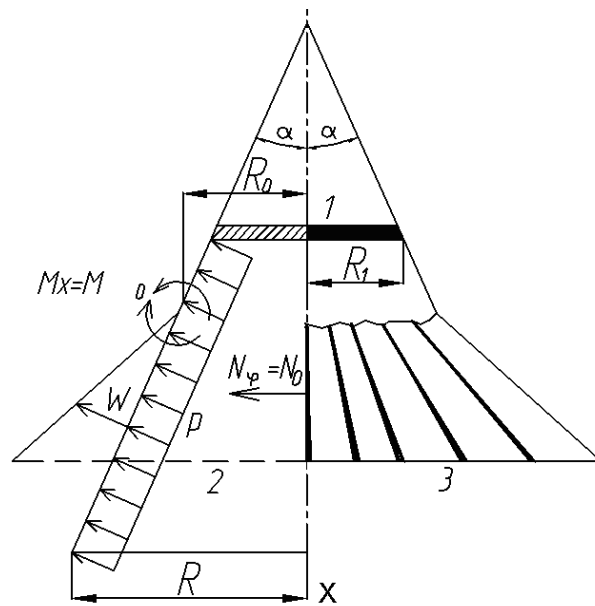


Рис. В2.3

Согласно работе [134], найденное давление разрушения равно

$$p = \frac{3}{R^2} \frac{N_0 R \cos \alpha (1 - r_0)^2 + 2 M_0 r_0 \sin^2 \alpha}{r_0^3 - 3 r_0 + 2}, \quad (\text{В2.2.1})$$

где $r_0 = R_0/R$. Положение шарнирной окружности радиусом R_0 определяется из условия минимума интенсивности нагрузки для рассматриваемой формы разрушения, то есть из условия $dp/dR_0 = 0$. Изменения положений шарнирной окружности для

заданного меридионального момента текучести M_0 и окружного усилия текучести N_0 приведены на рис. В2.4.

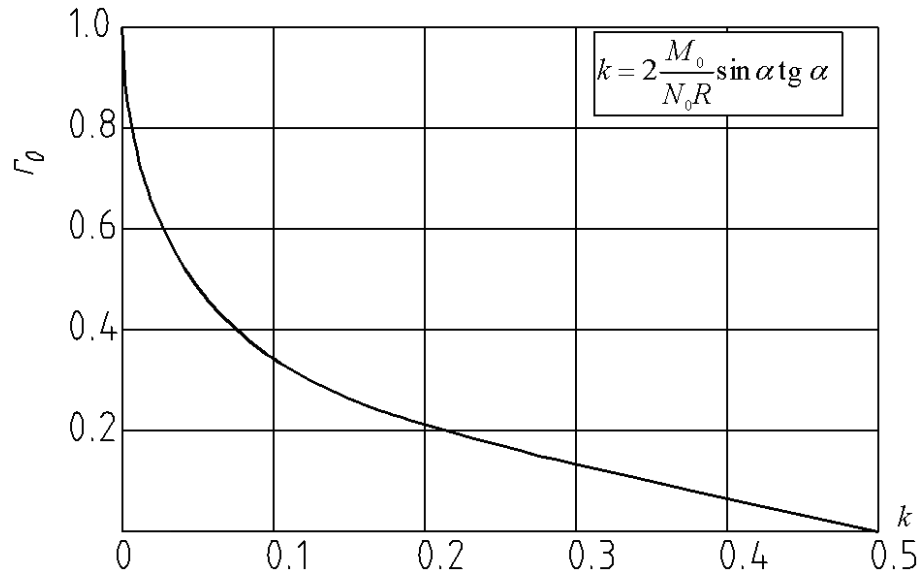


Рис. В2.4

А.Р. Ржаницын в [81] применил следующий метод: форма разрушения находится экспериментально, после чего определяется разрушающая нагрузка без составления уравнений поверхности текучести, но при заданных значениях внутренних сил текучести вдоль соответствующих линий текучести (линии сосредоточенных пластических деформаций). Рассмотрим оболочку на плоском основании в виде многоугольника. Пусть оболочка нагружена одной сосредоточенной силой (рис. В2.5, верх). Если края оболочки удерживаются от скольжения, но могут вращаться, то возможная форма разрушения будет такой, как показано на рис. В2.5, низ (1 – зоны пластической деформации). Линии OA , OB и т. д. являются линиями разрыва деформаций (линиями «сосредоточенных деформаций» по терминологии работы [81]). Если механизм разрушения связан с движением жестких элементов, вращающихся вокруг соответствующих осей, то вдоль линий пересечения этих элементов возникают разрывы как в наклоне, так и в осевом окружном удлинении $\dot{\lambda}_\theta$ срединной поверхности оболочки. Угол $\dot{\theta}_{OA}$ разрыва наклона по направлению нормали к линии OA так же, как в теории линий текучести пластин, равен

$$\dot{\theta}_{OA} = \frac{\dot{w}_0}{l_{OA}} (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta). \quad (\text{B2.2.2})$$

А. Р. Ржаницын предположил, что вдоль линий разрыва нейтральная поверхность, определяемая зависимостью

$$\dot{\lambda} / \dot{\theta} = -z, \quad (\text{B2.2.3})$$

лежит для всех точек вне поперечного сечения оболочки (это эквивалентно пренебрежению изгибающим моментом в выражении для внутренней диссипации, т. е. рассмотрению чисто мембранных эффектов).

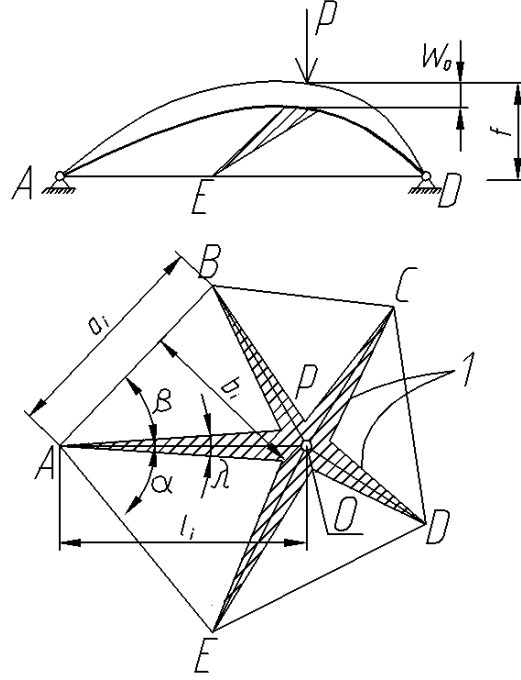


Рис. B2.5

Далее, так как скорость окружного удлинения $\dot{\lambda}_\theta$ имеет вид

$$\dot{\lambda}_\theta = \dot{\lambda}_{OA} = -\frac{\dot{w}}{l_{OA}} z(ctg \alpha + ctg \beta), \quad (\text{B2.2.4})$$

вклад D_c осевых разрывов в диссипацию внутренней энергии будет равен

$$D_c = N_0 \dot{w}_0 \sum_{i=1}^n \frac{ctg \alpha_i + ctg \beta_i}{l_i} \int_0^{l_i} z ds, \quad (\text{B2.2.5})$$

где $z = z(s)$ берется из уравнения срединной поверхности s оболочки. Очевидно, что вклад окружного мембранного усилия пропорционален площади между меридианом оболочки и опорной плоскостью. В случае, когда вкладом меридионального усилия в диссипацию внутренней энергии можно пренебречь (отсутствие меридиональных деформаций), оценка разрушающей нагрузки производится из условия (B2.2.5) совместно с соответствующим выражением для мощности внешних сил.

Например, для осесимметричной пологой оболочки, нагруженной сосредоточенной силой P , получаем

$$P = \frac{u_i N_0}{R} \int_0^R z dr. \quad (\text{B2.2.6})$$

Если уравнение оболочки имеет вид

$$z = f[1 - (r^n / R^n)],$$

где R – радиус опорного кольца, то для оценки разрушающей нагрузки находим

$$P = 2\pi N_0 f \frac{n}{n+1}, \quad (\text{B2.2.7})$$

где f — стрела подъема оболочки.

Если вкладом меридионального усилия в диссипацию внутренней энергии пренебречь нельзя, то выражение

$$D = N_\varphi \dot{\lambda}_\varphi + N_\theta \dot{\lambda}_\theta$$

можно заменить таким:

$$D = N_0 (\dot{\lambda}_\varphi + \dot{\lambda}_\theta).$$

В результате можно прийти к формуле (B2.1.6). Отсюда видна связь данного подхода с методами оценки верхних границ, обсуждавшимися ранее.

С другой стороны, если конструкция может скользить вдоль опор, то оси вращения не лежат в опорной плоскости, а располагаются в плоскости, проходящей на некотором расстоянии от опорной. Тогда (B2.2.5) принимает вид

$$D = N_0 \dot{w}_0 \sum_{i=1}^n \frac{ctg \alpha_i + ctg \beta_i}{l_i} \int_0^{l_i} |z - h| ds, \quad (\text{B2.2.8})$$

где расстояние h получается из условия, что ось вращения делит линию z на срединной поверхности оболочки на две части с одинаковыми величинами растягивающих и сжимающих усилий. Таким образом, в обсуждаемой теории для оценки разрушающей нагрузки оболочек используются понятия обычной теории пластических балок. Отличие состоит в том, что сечение соответствующей балки является меридианом оболочки, входящим под знак интеграла в равенствах (B2.2.5) и (B2.2.8). Другое различие связано с множителем перед интегралом.

Используя по существу те же понятия, которые излагались выше, с необходимыми изменениями для неоднородных поперечных сечений, Н. В. Ахвледиани [4, 5] и Н. В. Ахвледиани и В. Н. Шайшмелашвили [6, 7] получили разрушающие давления для пологих оболочек и равномерно нагруженных колпачков. Чтобы проиллюстрировать процедуру решения, исследуем железобетонную сферическую оболочку. Предполагая, что окружное усилие воспринимается армирующими стержнями (т. е. считая $N_\theta = N_0 = \sigma_0 A_\theta$, где A_θ – площадь круговой арматуры, отнесенная к единице длины, σ_0 – предел текучести арматуры), рассмотрим форму разрушения, показанную на рис. В2.6 (слева показан вид сбоку, справа – сечение рассматриваемой сферической оболочки). Ясно, что меридиональные полосы вращаются относительно линий, касательных к поверхности оболочки. В этой теории момент текучести M_0 предполагается зависящим только от площади меридиональной арматуры A_φ , так что

$$M_0 = 2H\sigma_0 A_\varphi,$$

где $2H$ – рабочая толщина стенки оболочки. Диссипация вдоль шарнирных окружностей равна

$$D_n = 2\pi M_0 r \dot{\varphi} \approx 2\pi M_0 r / (R - R_0), \quad (\text{B2.2.9})$$

так как вращение меридиональной полосы для единицы возможной вертикальной скорости границы дает $\dot{\varphi} = 1/(R - R_0)$. Энергия, соответствующая этой возможной скорости перемещений, рассеивается также на меридиональных шарнирах. Ее вклад можно вычислить как произведение угла поворота двух смежных секторов на соответствующий вращательный момент. Соответствующее выражение для окружной диссипации D_c будет таким:

$$D_c = 2\pi\sigma_0 \sum A_{\varphi i} d_i (R - R_0),$$

где d_i – расстояние i -го армирующего стержня от плоскости оси вращения сектора (рис. В2.6). Если оболочка нагружена давлением, равномерно распределенным по проекции площади оболочки, то соответствующее разрушающее давление равно

$$p = \sigma \frac{M_0 R_0 + \sigma_0 \sum A_{\varphi i} d_i}{R^3 - R_0^3}, \quad (\text{B2.2.10})$$

где σ – безразмерный коэффициент, R_0 вычисляется из условия $dp/dR_0 = 0$.

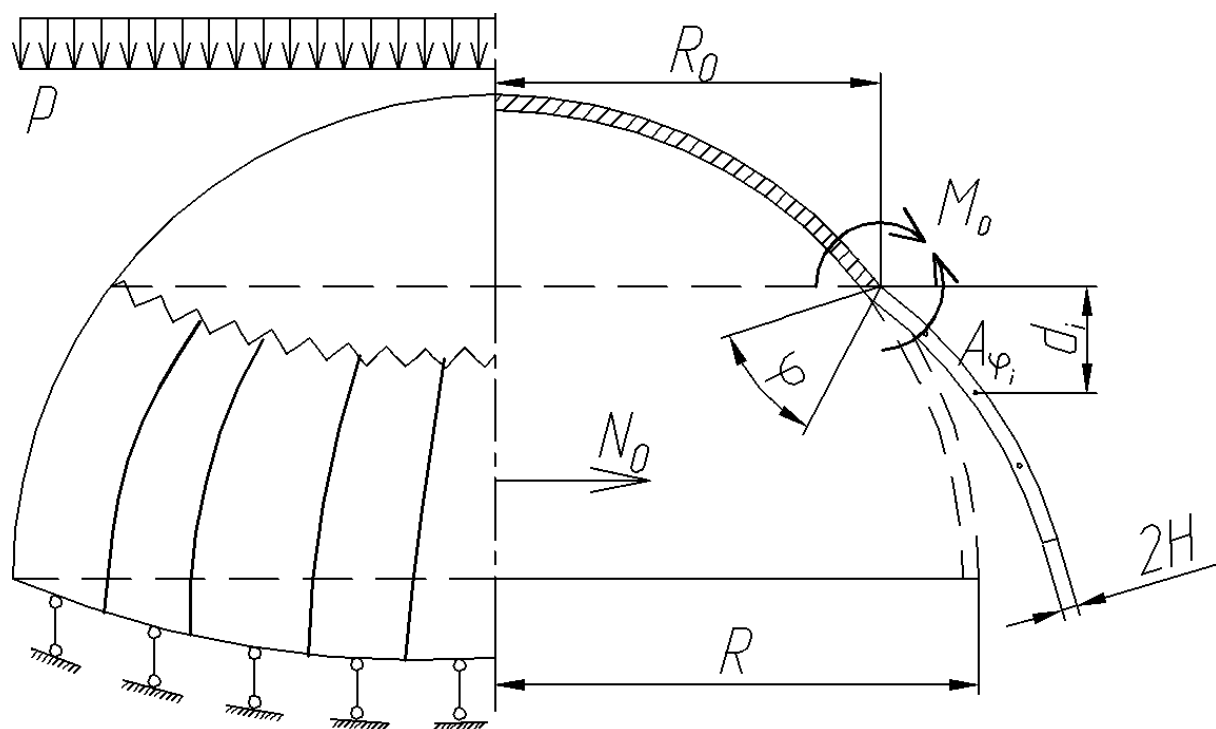


Рис. В2.6

В2.3. Современные методы расчета несущей способности конструкций

Появление достаточно мощных ЭВМ дало возможность широко использовать различные методы математического программирования для улучшения оценок разрушающей нагрузки (методы сведения задач теории пластичности при расчете тонких оболочек к задачам математического программирования рассматриваются в работе И.Г. Терегулова ([96])). Одним из наиболее используемых методов является метод линейного программирования (ЛП). Аппарат ЛП использован в работах [75, 119, 49, 88, 31, 22] и др.

Для численной реализации задачи на ЭВМ используются различные способы дискретизации области. В основном используются метод конечных элементов (МКЭ) и метод конечных разностей (МКР).

Дискретизация задачи о предельном состоянии конструкции на основе метода конечных элементов осуществлена в работах [117, 118, 22, 91] и др., на основе метода конечных разностей - в работах [119, 88, 31, 103] и др.

Использование аппарата математического программирования и итерационных

процессов в ходе численной реализации задачи дает возможность целенаправленного уточнения аппроксимации нелинейных условий прочности приближенными. Вопросы различных аппроксимаций поверхностей прочности рассмотрены в работах [97,130,121] и др. В работе И.Г. Терегулова [97] обсуждается способ аппроксимации предельных поверхностей путем их замены многоугольниками. В работе [130] Ф.Ходжа предложен метод конструирования кусочно-линейной аппроксимации произвольной функции текучести в процессе решения граничной задачи. В работе [121] кривая текучести итерационным методом аппроксимируется описанным полиэдром. Автор подчеркивает, что такой метод позволяет определять коэффициент несущей способности конструкции с требуемой точностью. В качестве примера им рассмотрена двухэтажная рама и параболическая арка.

Вопросы оценки несущей способности анизотропных и неоднородных пластин и оболочек рассмотрены в работах [41, 72, 88, 16, 56, 47, 86, 57, 24, 12, 47, 48, 46] и др.

М.Ш. Микеладзе в своих работах [47, 48, 46] рассматривал вопросы, касающиеся предельного состояния анизотропных (однослойных и многослойных) оболочек. Например, в работе [46] решается задача о несущей способности короткой анизотропной цилиндрической оболочки, подверженной действию равномерного давления, в случаях шарнирно-опертых и защемленных краев.

Ю.Р. Лепик в работе [44] рассматривал проблему о несущей способности неоднородных пластин и оболочек при осесимметричной деформации. Неоднородность состоит в том, что предел текучести меняется как по толщине оболочки, так и по соответствующей координате срединной поверхности. В качестве примера им рассмотрены задача о несущей способности неоднородной круглой равномерно нагруженной пластинки и задача о несущей способности цилиндрической оболочки, находящейся под равномерным внутренним давлением. Оболочка жестко закреплена по одному торцу и свободна по другому торцу. Для оболочки дано решение, справедливое для некоторого класса неоднородности.

В работе [12] на примере расчета квадратной трехслойной пластины, шар-

нирно опертой по контуру, сравниваются величины предельной нагрузки, найденной двумя различными методами. Первый из них - инкрементальный упругопластический анализ многослойных конструкций на основе уточненной теории и дискретноконинуальной схемы МКЭ; второй - кинематический метод теории предельных состояний с использованием представлений о линиях текучести. Оценки предельной нагрузки, полученные обоими методами, хорошо согласуются.

В работе [19] исследуется несущая способность цилиндрических конструкций с подкрепляющими элементами (шпангоутами произвольной формы) при локальном нагружении жестким ложементом, равномерным и неравномерным внешним давлением на части поверхности. Решение строилось на основе кинематического метода теории предельного равновесия с учетом геометрической нелинейности, основанной на шаговом методе. Используется теория среднего изгиба оболочек.

В работе [145] применен статический метод теории предельного равновесия и МКЭ для оценки несущей способности тонкого однородного полусферического купола, нагруженного в центре через жесткую впаянную шайбу. Оценка несущей способности получена в широком диапазоне параметров r/R и T/R (r – радиус шайбы, R – радиус сферы, T – толщина оболочки), а также с учетом и без учета сдвига. МКЭ – также в двух вариантах: с применением трехмерного и оболочечного элементов. Произведено сравнение оценок предельной нагрузки между собой и с ранее опубликованными оценками.

Критериям прочности железобетонных конструкций посвящены книги [71, 37].

В работе [1] рассматривается возможность использования в жесткопластическом анализе разрывных решений с неограниченными скоростями деформаций при приближении к поверхности разрыва.

Целью представленного в [126] исследования является разработка эффективного метода для прогнозирования несущей способности проектируемых оболочечных железобетонных конструкций. Составленная конечноэлементная программа ULCA для численной оценки несущей способности оболочек основана на применении концепции вырожденных изопараметрических оболочечных элементов с

учетом слоистости в направлении толщины. Использован трехмерный элемент с квадратичными функциями перемещений, обладающий пятью степенями свободы (три перемещения и два вращения) в каждом узле. Предполагается, что нормаль к срединной поверхности остается прямолинейной как при упругих, так и при пластических деформациях элемента. Исследованы различные формы разрушения вследствие образования трещин в бетоне при растяжении и текучести стальной арматуры с анализом влияния геометрической нелинейности оболочечной конструкции и физической нелинейности применяемого композитного материала.

Расчету прочности железобетонных конструкций при сложных сопротивлениях посвящена книга [68].

В работе [123] рассмотрены численные методы интегрирования соотношений ассоциированного закона пластичности при конечном шаге догрузки для квадратичного критерия текучести Хилла для ортотропной пластически несжимаемой среды. Рассмотрены два алгоритма вычислений на отдельном шаге догрузки. Основное отличие их состоит в выборе точки, в которой вычисляется градиент функции нагружения, и в определении коэффициента $\Delta\lambda$ в ассоциированном законе. Приведены данные численных экспериментов с оценкой ошибок приближенного интегрирования. Рассмотрены задачи расчета цилиндрической оболочки с равномерно распределенной нагрузкой и защемленной пластины с сосредоточенной силой в центре.

В работе Р.А. Каюмова [39] в рамках жесткопластического анализа показано, что нижнюю оценку предельной нагрузки можно получить из некоторой задачи управления. Предложена методика одновременного получения и верхней оценки. Найдено условие, при котором предложенный подход дает совпадающие границы.

Для однородных изотропных упругопластических пластин и оболочек переход из пространства напряжений в пространство внутренних погонных сил и моментов впервые был осуществлен, по-видимому, А.А. Ильюшиным [36]. Параметрические уравнения предельных поверхностей в пространстве внутренних сил и моментов для таких оболочек получены Г.С. Шапиро [110]. Для однородных ани-

зотропных оболочек, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию аналогичные уравнения получены А. Савчуком [86], а для случая, когда пределы текучести материала при растяжении и сжатии различны – Э.С. Сибгатуллиным [90].

Опираясь на работу А.А. Ильюшина [36], М.Ш. Микеладзе в [48] и в последующих своих работах определял предельные поверхности в пространстве сил и моментов для оболочек, состоящих из различных ортотропных слоев, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, при следующих предположениях: 1) слои расположены симметрично относительно срединной поверхности оболочки; 2) плоскости пластической симметрии отдельных слоев оболочки параллельны между собой и ортогональны к координатным осям, одна из которых (ось z) ортогональна к поверхности спая двух средних нулевых слоев оболочки, а две другие оси (x и y) совпадают с главными направлениями кривизны на ней; 3) постоянные анизотропии для произвольного k -го слоя пропорциональны постоянным нулевого слоя; 4) учитываются постулаты Кирхгофа – Лява; 5) слои не могут скользить друг относительно друга. Для получения приближенных предельных поверхностей, пригодных для использования в приложениях, М.Ш. Микеладзе часто рассматривает так называемое простейшее сложное напряженное состояние. Например, для случая однослойной оболочки предполагается, что мембранные напряжения – постоянны, а напряжение изгиба – кусочно-постоянны по толщине оболочки (т.е. рассматриваются статически определимые задачи).

В работах И.Г. Терегулова, Э.С. Сибгатуллина, О.А. Маркина [102], И.Г. Терегулова, Э.С. Сибгатуллина [99, 100], Э.С. Сибгатуллина, И.Г. Терегулова [101], Э.С. Сибгатуллина, И.Г. Терегулова, С.Н. Тимергалиева [93] разрабатывалась методика определения предельных поверхностей для тонких слоистых композитных оболочек и пластин произвольной структуры для общего случая напряженно-деформированного состояния в пространстве обобщенных сил. При этом существенно были использованы постулат Друккера, ассоциированный закон деформирования, традиционные гипотезы статического и кинематического характера.

Согласно мнению Ю.В. Немировского, А.В. Шульгина [58], для конструкций из волокнистых композитов следует строить критерии прочности не в пространстве

напряжений, а в пространстве нагрузок, что дает, по мнению авторов, более наглядную и достоверную информацию для оценки их несущей способности. В этой работе на основе структурного анализа разработаны методика расчета слоистых оболочечных конструкций из волокнистых металлокомпозитов вплоть до момента разрушения и методика построения поверхностей несущей способности при произвольной структуре армирования и свойствах субструктурных элементов.

В работе Щербакова В.Т., Попова А.Г. [114] приведены результаты экспериментального определения прочности и устойчивости оболочек из углепластика, изготовленных намоткой предварительно пропитанной однонаправленной ленты. Приведены сравнения экспериментальных результатов с расчетными и оценка степени реализации прочностных свойств материала конструкции при плосконапряженном состоянии.

В работе Шестакова А.С., Тимошенко А.М. [111] изложена методика экспериментального определения несущей способности пластин из композиционных материалов. Приведены результаты расчета и эксперимента.

В работе А.С. Дехтяря, А.Ж. Сыдыкова [26] рассматриваются пологие оболочки с отверстиями, которые могут располагаться асимметрично относительно краев оболочки, иметь различную форму. Известен функционал, описывающий верхнюю границу предельной нагрузки для пологих оболочек с любой срединной поверхностью, с произвольным распределением материала и нагрузки. Показано, что с помощью этого функционала могут быть учтены условия закрепления краев, анизотропия жесткопластического материала, ребра и другие особенности конструкции.

В работе В. А. Постнова, М. И. Трубачева [69] отмечается, что несмотря на простоту основных положений метода конечных элементов, его использование в численных расчетах геометрически сложных оболочек связано с определенными техническими трудностями. Чаще всего в качестве КЭ берут части поверхностей фиксированной формы: плоской, цилиндрической, сферической, конической или другой. Форму КЭ ограничивают треугольным или четырехугольным контуром с

различным количеством промежуточных точек (степеней свободы). Дополнительно подразумевается совпадение границ КЭ с главными линиями кривизны срединной поверхности оболочки. Для геометрически сложных тонкостенных конструкций такой подход приводит к необходимости выбора большого количества КЭ, неоправданно большим затратам ручного труда при подготовке исходных данных, нарушению плавности формы расчетной модели оболочки в месте сопряжения КЭ. Предложена общая схема построения изопараметрических конечно-элементных моделей, свободная от перечисленных недостатков. В ее основе лежит глобальная параметризация несущей поверхности оболочки системой гауссовых координатных линий, произвольно расположенных на срединной поверхности оболочки. Получены аналитические выражения для вычисления коэффициентов матрицы жесткости и вектора усилий для всей конструкции в целом.

В работе D. Johnson [133] рассмотрен алгоритм расчета линий (шарниров) текучести в упругопластических железобетонных плитах при равномерно распределенной нагрузке. Задача сводится к поиску нижней границы текучести методом линейного программирования. Действительная схема разрушения устанавливается соответствующим подбором расположения цилиндрических шарниров текучести. В качестве примера рассмотрена ортотропная прямоугольная плита с одним коротким защемленным краем и точечными опираниями двух углов.

В работе Н.Н. Панасенко, А.Н. Дудченко [66] разработана математическая модель абсолютно жесткого пространственного конечного элемента (АЖКЭ), включающая в себя статические и геометрические ограничения, накладываемые АЖКЭ на НДС упругих частей металлоконструкций. Описан алгоритм учета АЖКЭ применительно к МКЭ в форме метода перемещений. Приведены примеры расчетов, подтверждающие необходимость учета АЖКЭ с целью получения корректной матрицы жесткости.

В книге Родионовой В.А., Титаева Б.Ф., Черных К.Ф. [82] в систематизированном виде изложена линейная теория нетонких и неоднородных анизотропных пластин и оболочек с учетом поперечных сдвигов, поперечных нормальных напря-

жений, деформируемости оболочки в направлении нормали к срединной поверхности и нелинейного распределения компонент вектора перемещения по толщине. Получена система дифференциальных уравнений, удобная для расчетов на ЭВМ. Предложены уточненные теории, а также методы расчета на прочность слоистых пластин и оболочек, собранных из анизотропных слоев постоянной толщины.

В работе [50] отмечено, что анализ истории развития метода показал, что расчетная модель кинематического предельного равновесия вобрала в себя подавляющее большинство лучших и многократно апробированных идей расчета. Кинематический метод предельного равновесия отвечает принципу виртуальных перемещений, как одному из основополагающих принципов механики и позволяет реализовать внутренние резервы несущей способности гибких железобетонных фундаментов и грунтового основания.

Целью статьи [53] является разработка метода численного решения многоточечных краевых задач для систем нелинейных дифференциальных уравнений со свободными границами, когда их число и порядок реализации заранее не известны. Применительно к задачам анализа жесткопластических оболочек с кусочно-линейным потенциалом предлагается метод решения такого типа задач.

В работе [60] сформулирована и решена, методом линейного программирования, задача определения верхней кинематической границы несущей способности сложно армированных вращающихся дисков постоянной и переменной толщин.

В работе [59] сформулирована и решена методом линейного программирования задача определения верхней кинематической границы предельной нагрузки для сложно армированных кольцевых пластин постоянной и переменной толщин при поперечном изгибе. Показано: наибольшую предельную нагрузку обеспечивает структура с радиально-окружной укладкой волокон; максимально допустимые уровни нагружения пластин, работающих в пределах упругого деформирования фаз композиции, в несколько раз ниже уровней предельного нагружения.

А в работе [61] сформулирована и решена методом линейного программирования задача определения верхней кинематической границы несущей способности сложноармированных железобетонных куполов вращения под действием массовой

и снеговой нагрузок. Показано, что наибольшей несущей способностью обладают купола с меридионально-окружным армированием при концентрации арматуры в окрестности крышки купола. Исследованы разные "механизмы" разрушения куполов и влияние учета сопротивления бетона растяжению на значение расчетной предельной нагрузки.

Целью работы [109] является исследование оценки несущей способности пластической полой оболочки, для которой применены такие материалы оболочек, которые относятся к идеально жестко-пластической модели диаграммы "напряжение-деформация".

В работе [144] отмечено, что защитные оболочки АЭС из железобетона обеспечивают не только удержание радиоактивных выбросов, но и защиту ядерного реактора и оборудование от возможного внешнего воздействия падающих объектов (ракеты, самолеты и т. п.). В работе предложен простой эффективный метод численной оценки устойчивости железобетонных оболочек по отношению к подобному воздействию. Модель может быть использована в задачах оптимального проектирования защитных конструкций АЭС.

В работе [143] на основе кинематического метода теории предельного равновесия и возможных механизмов разрушения определяется несущая способность. Из условия равнопрочности двух схем разрушения, "балочной" и "дискретной", предлагается оптимальное проектирование конструкции.

В работе [120] предложен новый метод расчета несущей способности прямоугольных железобетонных профилей с дважды симметричным армированием, нагруженных осевой силой и моментами в двух плоскостях. Метод заключается в сведении задачи к анализу изгиба в одной плоскости и основан на аналитических выкладках с допущениями по Еврокоду 2. Он применим к бетону как нормальной, так и повышенной прочности, и к различному расположению арматуры - в четырех углах, равномерному распределению по контуру или по двум противоположным граням. Метод позволяет просто и точно проектировать и проверять железобетонные профили. Проведено его сравнение с теоретическими результатами и экспериментальными данными из литературы.

В работе [112] утверждается, что интерьеры зданий с покрытием из оболочек становятся особенно архитектурно-выразительными при наличии в них больших световых отверстий. С целью снижения собственного веса покрытия, составляющего большую часть полной нагрузки, ромбические ячейки, образующие оболочку, заполняются структурными элементами, состоящими из контурной рамки, центральной стойки, верхних и нижних тросов, соединяющих каждый узел рамки с двумя концами стойки. Увеличение длины центральной стойки с помощью специального натяжного устройства растягивает тросы и приводит всю систему в самоуравновешенное состояние. Приведен пример использования этой системы при проектировании сталежелезобетонных оболочек покрытий зданий размерами от 24*24 м до 60*60 м. Оболочки имеют форму многогранника, каркас которого образован системой тонкостенных пустотелых линейных элементов, выполненных из тяжелого, особо высокопрочного, бетона. Ячейки, образовавшиеся при пересечении линейных элементов каркаса, заполняются железобетонными плитами только в угловых и приконтурных зонах. Большая часть покрытия, площадью 50 и более процентов от всей поверхности оболочки, заполняется указанными выше самоуравновешенными металлическими системами, являющимися опорами для светопрозрачных конструкций из стекла или пластика. В статье приведены результаты расчетов оболочек, выполненных методом конечных элементов, на различные сочетания нагрузок, а также результаты испытаний модели в масштабе 1:15 геометрически подобной натурной конструкции оболочки 24*24 м, которые подтвердили высокую прочность и жесткость конструкции оболочки, а также показали хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных. Результаты исследований оболочки 24*24 м были использованы при проектировании оболочек размером 60*60 м.

В работе [113] разработан расчет гладких и ребристых железобетонных оболочек положительной, нулевой и отрицательной гауссовой кривизны методом предельного равновесия, который в нелинейной постановке позволяет совместить решение задач прочности и устойчивости в едином расчетном цикле и получить не-

обходимые для проектирования значения несущей способности оболочек и критического прогиба, соответствующего расчетной схеме деформирования, а также провести анализ влияния на несущую способность прочностных и геометрических параметров оболочек с целью выбора оптимального конструктивного решения.

В работе [116] решается задача определения остаточных деформаций железобетонной оболочки типа гиперболического параболоида (гипар), подвергнутой импульсной нагрузке, методом модальных аппроксимаций. Оболочка гипар оперта двумя нижними концами, которые не имеют возможность горизонтального смещения (оболочка снабжена затяжкой, или контрфорсами).

В работе [115] поведение консольных железобетонных оболочек при ударных нагрузках изучено на основе жестко-пластической теории с использованием принципа Даламбера. В результате решения дифференциальных уравнений поступательного и вращательного движений конструкции получены уравнения, которые определяют прогибы в зависимости от времени и от положения пластического шарнира. Для решения этой задачи использован принцип постоянства количества движения и получены уравнения, которые, согласно мнению автора, более удобны для расчета прогибов при ударных нагрузках ввиду их простоты, а также очень ценны для проведения поверочных расчетов.

Седых Ю.Р. в своей работе [89] при определении критериев оценки состояния бетонных и железобетонных конструкций ГЭС и ГАЭС при их обследовании, использовал принципы предельных состояний строительных конструкций, на которых базируются их расчетные параметры. Показал, что анализ условия эксплуатации бетонных и железобетонных конструкций ГЭС и ГАЭС определяет классификацию дефектов относительно групп предельных состояний, и, следовательно, уровень критериев безопасности при обследовании. Критерии, или изменяемые показатели, дефектов при обследовании должны учитывать банк данных самих обследований, условия работы конструкции и расчетные показатели по предельным состояниям.

В работе [52] разработан метод решения задач динамического изгиба прямо-

угольных армированных пластин при воздействии нагрузок взрывного типа. Определено понятие предельного упругого сопротивления и найдены предельные нагрузки при различных структурах армирования и разных условиях закрепления краев. Сформулирована и решена задача о рациональных структурах армирования плит при динамических нагружениях рассматриваемого типа.

В работе [54], нахождение верхней и нижней оценок нагрузок несущей способности идеально-пластических конструкций связано с построением, соответственно, кинематически возможных полей скоростей и статически возможных полей напряжений. Если нахождение верхней оценки обычно не встречает трудностей, то получение нижних оценок вызывает большие сложности, связанные с тем, что поля напряжений, определенные в пластической области, должны допускать продолжения в жесткие зоны и при этом нигде не должно быть превышено условие пластичности. В статье предлагается простой способ получения нижних оценок несущей способности однородных и неоднородных конструкций при комбинированных нагружениях.

В работе [125] рассматриваются пористые металлические жесткопластические материалы. Для упрощения принято, что полости (поры) имеют цилиндрическую форму. Сред всех известных выбрана модель, предполагающая замену пористого материала однородным (модель Хилла-Мандела). Применены кинематический и статический методы теории предельного равновесия и получены соответствующие верхняя и нижняя оценки несущей способности. Они сравниваются с аналитическими и полуаналитическими решениями, ранее опубликованными другими исследователями.

В работе [139] рассматриваются упруго-пластические твердые тела под действием сложного нагружения - совместного действия наложенных постоянных и циклических нагрузок. Для получения известных результатов в теории разрушения используются классическая теорема о максимуме пластической диссипации и абсолютно новые оригинальные концепции такие, как разрушающая предельная нагрузка, связанная с заданной, немгновенной, модой разрушения; смешанная

верхняя граница для запаса прочности в процессе разрушения; смешанная статически-кинематическая формулировка задачи определения запаса прочности для разрушающейся структуры. Исследована граничная поверхность нагружения в процессе разрушения структуры. Приведен пример, иллюстрирующий теоретические результаты, а именно, термоциклирование двухбалочной структуры под действием постоянной нагрузки.

В книге [29] рассматривается техническая теория изгиба тонких пластинок и примеры расчета их с использованием одиночных тригонометрических рядов; теория и примеры расчета конструкций по предельным состояниям статически неопределимых балок, стержневых систем и тонких пластинок (статическим и кинематическим методами); даются рекомендации по постановке и выполнению расчетов; приводятся исходные данные для выполнения работ; рассматриваются подробно примеры выполнения, оформления и методические указания по защите расчетно-графических работ.

В работе [138], на основе применения статического и кинематического методов предельного равновесия в сочетании с численным методом конечных элементов определена предельная высота вертикального откоса грунта в условиях плоской деформации.

Алифанов Л.А. в своей работе [2] предложил методику расчета железобетонных плит на основе статического метода предельного равновесия, позволяющая существенно упростить решение задач по сравнению с кинематическим методом. Приведены расчетные формулы для вычисления значений предельных нагрузок. На примерах с различными схемами нагружений плит показана целесообразность использования методики при проектировании сооружений. Наряду с раскрытием причинно-следственных связей явлений, происходящих при достижении предельного состояния на стадии образования в плитах линейных пластических шарниров, способ также эффективен при разработке машинных программ.

В работе [25] описан метод расчета несущей способности гибкой железобетонной подпорной стенки, собираемой из оболочечных элементов. Применен кинематический метод теории предельного равновесия. Для построения допустимых

полей перемещений использован метод логических R-функций. Сформулирована задача оптимального проектирования подпорных стенок из сборных оболочечных элементов. Переменные в ней - опалубочные размеры и армирование. Приведены примеры и дано сравнение с известным проектом традиционной гибкой плоской подпорной стенки.

В работе [11] предлагается метод оценки несущей способности пластины, лежащей на упругом основании, разработанный на основе кинематического принципа теории предельного состояния. Метод позволяет учесть неоднородность и анизотропию прочностных свойств материала пластины. При численной реализации метода предполагается использовать метод конечных элементов и аппарат линейного программирования.

В работе [3] разработан интерфейс сопряжения дистанционных датчиков и персонального компьютера с визуализацией результатов опытов в реальном масштабе времени. Получены новые экспериментальные данные о распределении контактных напряжений, а также нормальных вертикальных напряжений по глубине во всем интервале нагружения. Получены новые экспериментальные данные о распределении относительных линейных и сдвиговых деформаций в основании железобетонных фундаментов во всем интервале нагружения. Получены схемы излома сборных отдельных фундаментов при внешней нагрузке, использующиеся в расчете фундаментов кинематическим методом предельного равновесия. Разработана методика многокритериальной оптимизации параметров отдельных сборных фундаментов под колонны каркасных зданий для ПК "АПОФЕОС" в модуле "OPTIMUM". Разработана новая конструкция отдельного сборного фундамента, отличающегося поворотом составных элементов опорной плиты относительно продольной оси.

В работе [122] предложен численный метод определения сил давления для выпрессовывания пористой заготовки. Определялись кинематически допустимые поля скоростей в трехмерных координатах. Разработан численный метод определения по ступеням координат и времени элементов рабочих органов пресса. Результаты расчетов сравнивались с вычислениями методом конечных элементов.

Обзор литературы показал, что:

- кинематический метод находит более широкое применение, чем статический;
- в научной литературе описаны решения только таких задач, когда в исходных данных присутствуют существенные ограничения (например, осесимметричность, равномерное армирование вдоль координатных линий, простые критерии прочности, когда учитывается работа только изгибающих моментов – для железобетонных конструкций, и т.п.)
- не обнаружены программные комплексы для ЭВМ, которые используют критерии прочности, аналогичные (2.2.11).

Отсюда можно сделать вывод, что развитие методов расчета армированных и неармированных пластин и оболочек по несущей способности является актуальной задачей.

1. Основные положения теории предельного равновесия

1.1. Поверхность нагружения

Для математической постановки задачи механики сплошной среды необходимы соотношения, определяющие связь между силовыми и кинематическими параметрами в элементе среды. Разрушение материала (пластическое или хрупкое) является, как правило, необратимым процессом. Когда деформирование среды является необратимым процессом, поведение материала, предписываемое законом деформирования, должно зависеть от направления процесса. Такая своеобразная неаналитичность приводит к появлению в фазовом пространстве внутренних параметров некоторых предельных поверхностей, очертание и изменение которых оказывает решающее влияние на форму самого закона деформирования [40].

В результате изменения внешних сил, действующих на тело, и перемещений его границы, происходит изменение напряженно-деформированного состояния каждого его элемента. Процесс изменения напряжений σ_{ij} в элементе называют процессом нагружения, а изменение его деформации ε_{ij} – процессом деформирования.

Любой из этих процессов можно представить в виде кривых – траекторий в некоторых фазовых пространствах, координатами которых являются параметры либо напряженного, либо деформированного состояния. В пространстве напряжений каждому напряженному состоянию σ_{ij} отвечает определенная точка или вектор $\vec{\sigma}$ – векторных напряжений, начало которого совпадает с началом координат (ненапряженное состояние), а конец совпадает с данной точкой. Изменению напряженного состояния (догрузке) $\delta\sigma_{ij}$ отвечает вектор $\delta\vec{\sigma}$, который называют вектором догрузки, процессу изменения напряжений – траектория, вычерчиваемая концом вектора $\vec{\sigma}$ (траектория, или путь нагружения).

Аналогичным образом определяют пространство деформаций. Иногда одно и то же девятимерное декартово пространство используют как для представления напряжений, так и для представления деформаций, откладывая вдоль данного орта

пространства одноиндексные компоненты тензоров (например, σ_{11} и ε_{11}).

Мы ограничимся рассмотрением только таких материалов, для которых результат деформирования не зависит от скорости процесса нагружения в данное напряженное состояние (упруго-пластические материалы).

Обобщение свойств деформирования упругопластического тела, которые оно проявляет при одноосном растяжении–сжатии, на случай сложного напряженного состояния приводит к концепции о существовании поверхности нагружения [40], которая состоит в следующем (рис. 1.1.1).

Для каждой текущей точки B_1 произвольной траектории нагружения OB_1 в пространстве напряжений существует поверхность пределов упругости f_1 (поверхность нагружения), все внутренние точки которой достижимы из данной упругим деформированием. Поэтому если, начиная с какой-то точки, траектория нагружения идет внутри поверхности, построенной для этой точки, например B_1A , то новых необратимых деформаций не возникает. Считается, что в таком процессе сама поверхность нагружения не изменяется; для любой точки такой траектории поверхностью нагружения служит поверхность f_1 (начальная поверхность f_0 показана на рис. 1.1.1 штриховой линией).

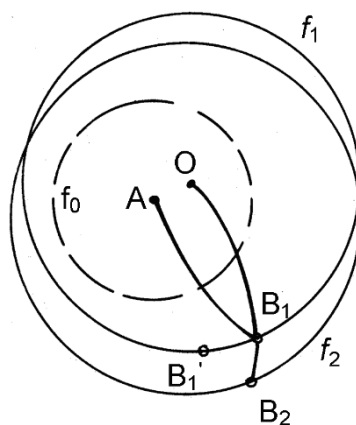


Рис. 1.1.1

Если же траектория выходит наружу поверхности нагружения, построенной для предыдущей точки, например, траектория B_1B_2 , то возникают новые необратимые деформации. При этом меняется сама поверхность нагружения (ибо она должна содержать текущую точку траектории). Считается, что это изменение поверхности нагружения происходит непрерывно: если отрезок B_1B_2 мал, то новая

поверхность f_2 , отвечающая точке B_2 , мало отличается от f_1 и в пределе, когда $B_2 \rightarrow B_1$ эти поверхности совпадают [40].

Процесс, при котором возникают необратимые деформации, называют активным нагружением, а процесс, сопровождающийся только упругим деформированием – пассивным нагружением, или – разгрузкой. Процесс, при котором траектория нагружения, начиная с некоторой точки, идет вдоль поверхности нагружения, построенной для этой точки, например B_1B_1' , является пограничным между активным и пассивным, и его называют нейтральным нагружением. Свойства деформирования при нейтральном нагружении определяют как предельные.

Деформацию элемента материала ε_{ij} часто представляют как сумму упругой (обратимой) ε_{ij}^e и пластической (необратимой) ε_{ij}^p частей:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (1.1.1)$$

Форма и размеры поверхности нагружения определяются только пластической частью деформации и историей ее изменения. Следовательно, аналитически уравнение текущей предельной поверхности можно представить в виде

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_n^p = 0), \quad (1.1.2)$$

где через χ_n^p условно представлены параметры, зависящие от истории изменения ε_{ij}^p , постоянные при фиксированных ε_{ij}^p [40].

Следует отметить, что представление общей деформации в виде двух аддитивных составляющих является всего-навсего широко распространенной гипотезой. При случайной или методологической ошибках в выделении пластической составляющей из общей деформации могут возникнуть существенные искажения экспериментального результата [94].

1.2. Жесткопластическое тело

При решении задачи о предельном равновесии, необходимо правильно определить положение и размеры пластического шарнира на поверхности, например, для фермы необходимо выяснить, какие из ее стержней перейдут в пластическое состояние.

Если мы будем учитывать упругие деформации системы, то необходимо будет рассмотреть также промежуточные состояния системы, когда присутствуют и упругие, и пластические деформации, причем рассматривать их на каждом этапе образования нового пластического шарнира. Учитывая, что конечные упругие деформации пренебрежительно малы по сравнению с неограниченными пластическими деформациями, мы можем в качестве расчетной схемы принять жесткопластическую схему разрушения.

В этом случае, материал совсем не деформируется при $\sigma < \sigma_T$ и получает возможность неограниченной деформации при $\sigma = \sigma_T$. Диаграмма зависимости между напряжением и деформацией для такого материала изображена на рис. 1.2.1 [73].

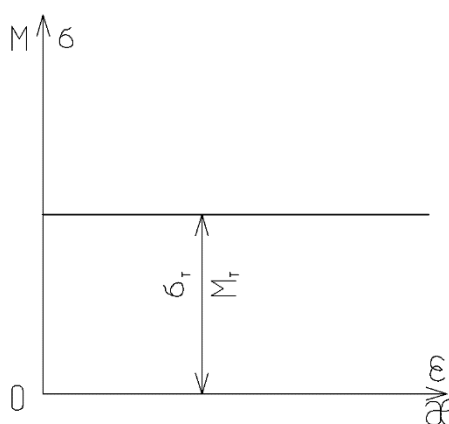


Рис. 1.2.1

Заметим, что мы считаем, как будто балка совсем не деформируется, пока изгибающий момент меньше чем M_T , и получает возможность неограниченно изгибаться, когда момент достигает этого предельного значения. Применительно к системе из жесткопластических стержней, работающих на растяжение-сжатие или изгиб: если в некоторых стержнях усилия достигнут величины $N_T = \sigma_T A$, то эти стержни потекут. В некоторых сечениях изгибаемых стержней момент достигнет предельного значения M_T , в этих сечениях образуются пластические шарниры. При некоторой комбинации внешних нагрузок Q_T система станет кинематически изменяемой, причем для неограниченного течения системы в целом достаточно, чтобы она превратилась в механизм с одной степенью свободы. Для общности и единообразия, вместо усилий и моментов мы рассмотрим обобщенные внутренние силы R_S ,

которые достигают предельных значений R_{ST} . Если $R_s = R_{ST}$, то обобщенное перемещение r_s становится неопределенным, как это видно из диаграммы рис. 1.2.1. Вместо перемещений, рассмотрим скорости перемещений, при том в тот момент, когда текучесть только наступила, перемещения еще малы и изменение геометрии не существенно. Скорость перемещения \dot{r}_s при $R_s = R_{ST}$ тоже неопределенна, поэтому термин «скорость» понимается здесь в условном смысле: это есть производная от r_s , по любому монотонно возрастающему параметру. Но каждый элемент, перешедший в состояние текучести, связан с жесткими элементами. Поэтому соотношение между скоростями деформации отдельных элементов будет уже не произвольным, а совершенно определенным; скорости \dot{r}_s находятся с точностью до неопределенного множителя [73].

1.3. Условие текучести и поверхность текучести

Если на жестко-пластическую систему действует система n внешних сил Q_i , то условие достижения предельного состояния записывается в следующем виде [73]:

$$F(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = 0. \quad (1.3.1)$$

Условие текучести определяется поверхностью текучести в n -мерном пространстве сил (1.3.1). Закон течения (1.3.2) устанавливает распределение скоростей \dot{q}_i , появляющихся при достижении условия текучести под действием сил Q_i :

$$\dot{q}_i = \dot{\lambda} f_i(Q_k), i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3.2)$$

Здесь $\dot{\lambda}(\dot{q}_i) \geq 0$ – скалярный множитель.

В отличие от закона упругости, течение наступает только тогда, когда силы Q_i в точности удовлетворяют условию (1.3.1). Если $F(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) < 0$, никакого течения нет, $\dot{q}_i = 0$.

В пространстве сил каждая комбинация внешних нагрузок изображается точкой с координатами Q_i ; если точка находится внутри поверхности текучести, система остается жесткой, если точка находится на поверхности, происходит текучесть. Состояния, изображаемые точками вне объема, ограниченного поверхностью текучести, невозможны. Состояние текучести достигается вследствие того,

что достаточное число элементов системы переходит в пластическое состояние. Это значит, что обобщенное усилие в соответствующем элементе R_S достигает предельного значения R_{ST} и соответствующая обобщенная скорость \dot{r}_s становится отличной от нуля.

Так, если число элементов есть m , их скорости \dot{r}_s , то скорости точек приложения внешних сил \dot{q}_i выражаются через \dot{r}_s линейным образом: $\dot{q}_i = \alpha_{is} \dot{r}_s$.

Мощность внешних сил есть $Q_i \dot{q}_i$, она должна равняться мощности, необходимой для пластического формоизменения $R_{ST} \dot{r}_s$, таким образом,

$$Q_i \dot{q}_i = R_{ST} \dot{r}_s. \quad (1.3.3)$$

Изменив величины внешних сил таким образом, что они продолжают удовлетворять условию текучести (1.3.1), и приняв, что в пластическом состоянии остаются те же элементы, скорости \dot{r}_s также останутся прежними, как и скорости \dot{q}_i , тогда вместо (1.3.3) мы получим

$$(Q_i + \delta Q_i) \dot{q}_i = R_{ST} \dot{r}_s, \quad (1.3.4),$$

поскольку внутренние силы R_{ST} сохраняют постоянное значение. Сравнивая (1.3.3) и (1.3.4), находим

$$\dot{q}_i \delta Q_i = 0.$$

С другой стороны, из условия того, что $Q_i + \delta Q_i$ удовлетворяет уравнению (1.3.1), следует

$$\frac{\partial F}{\partial Q_i} \delta Q_i = 0.$$

Таким образом, используя $\dot{q}_i \delta Q_i = \frac{\partial F}{\partial Q_i} \delta Q_i$, получим

$$\dot{q}_i = \lambda \frac{\partial F}{\partial Q_i}. \quad (1.3.5)$$

Соотношение (1.3.5) называется *ассоциированным законом течения*. Смысл этого термина состоит в том, что закон течения тесно связан с условием текучести, он ассоциирован с этим условием.

Величины \dot{q}_i можно рассматривать как составляющие вектора в n -мерном пространстве. Этот вектор имеет совершенно определенное направление, устанавливаемое формулой (1.3.5), но величина его неопределенна. Если строить вектор с компонентами \dot{q}_i в пространстве сил, то соотношение (1.3.5) означает, что вектор скорости направлен по нормали к поверхности текучности.

На рис. 1.3.1 изображен кусок поверхности текучности; совокупность сил, действующих на систему, изображается вектором \vec{Q} ; если система находится в предельном состоянии, то точка M , конец вектора \vec{Q} , лежит на поверхности текучности. Вектор \vec{q} с компонентами \dot{q}_i направлен по нормали к поверхности текучности в точке M .

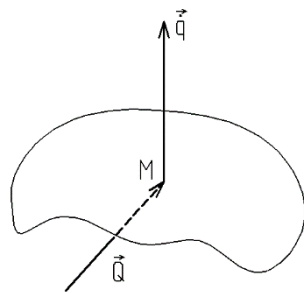


Рис. 1.3.1

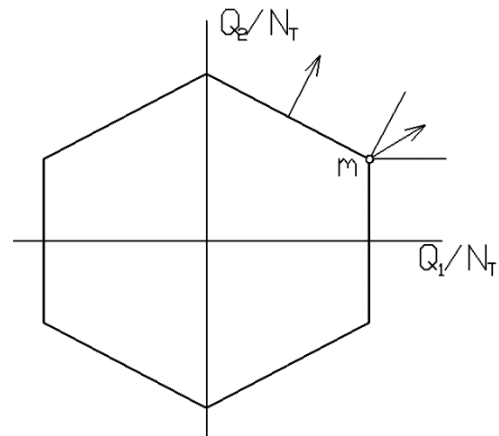


Рис. 1.3.2

На рис. 1.3.2 изображен многоугольник текучности. Он состоит из гладких, в данном случае прямолинейных участков, но имеет угловые точки, в которых производная не существует и, следовательно, формула (1.3.5) неприменима.

В точке m на рис. 1.3.2 нагрузка удовлетворяет одновременно двум условиям текучности. Проведем нормали к сторонам шестиугольника, пересекающимся в точке m ; направление вектора скорости в точке m неопределенно, но он всегда находится внутри угла, образованного этими нормальями.

В общем случае поверхность текучности есть гиперповерхность в n -мерном пространстве, она может состоять из гладких кусков, образующих в пересечении ребра. Пусть изображающая точка находится в пересечении двух гладких поверхностей $F_1(Q_i)=0, F_2(Q_i)=0$.

Тогда формула (1.3.5) применяется два раза, и мы получаем следующий закон течения:

$$\dot{q}_i = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} + \dot{\lambda}_2 \frac{\partial F_2}{\partial Q_i}. \quad (1.3.6)$$

Здесь $\dot{\lambda}_1$ и $\dot{\lambda}_2$ – неопределенные множители, которые могут принимать любые значения, но обязательно неотрицательные, чтобы вектор скорости был направлен по внешней нормали к поверхности текучести. В противном случае мощность, затрачиваемая на пластическую деформацию, была бы отрицательна.

1.3.1. Выпуклость поверхности текучести

Если число структурных элементов изгибаемой стержневой системы конечно и существует конечное число форм перехода системы в предельное состояние, то эпюра моментов также будет кусочно-линейной, следовательно, максимальное значение момента может достигаться только в том сечении, где приложена сила. Число возможных комбинаций пластических шарниров конечно; для любой комбинации условие статики, связывающее значение внешних сил, будет линейным, поверхность текучести и в этом случае представляет собою многогранник и ассоциированный закон течения сохраняет силу.

Покажем, согласно [73], что многогранник, представляющий собою поверхность текучести, будет всегда выпуклым. Для этого рассмотрим случай двух сил. Пусть некоторой комбинации элементов, перешедших в пластическое состояние в плоскости Q_1, Q_2 , соответствует прямая ab (рис. 1.3.3). Тогда полуплоскость справа от линии ab (отмечено горизонтальной штриховкой) будет областью недопустимых состояний; если конец вектора \vec{Q} оказывается в этой области, усилия в пластических элементах из условия статики должны быть больше предельных, что невозможно.

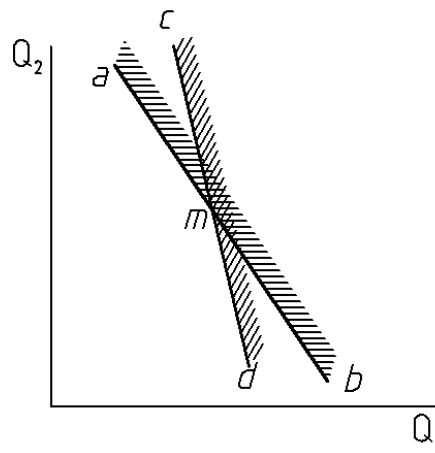


Рис. 1.3.3

Некоторой другой комбинации пластических элементов соответствует прямая cd . Часть плоскости, находящаяся справа от cd и отмеченная наклонной штриховкой, будет опять-таки областью не допустимых состояний. Следовательно, границей области допустимых состояний является ломаная amd с углом в точке m меньшим чем π . Продолжая это построение, мы всегда получим выпуклый многоугольник и выпуклый многогранник в общем n -мерном случае.

В общем случае, число элементов, которые могут переходить в пластические состояния, не обязательно конечно. В балке, несущей распределенную нагрузку, момент может достигать предельного значения в любом сечении. Мысленно заменим гладкую балку стержнем с надрезами на расстоянии Δ , как показано на рис. 1.3.4. В таком стержне пластические шарниры будут возникать только в надрезанных сечениях, число их всегда конечно, поэтому поверхность текучести представляет собою многогранник. Для такой балки будет справедлив ассоциированный закон течения. Перейдем теперь к пределу при $\Delta \rightarrow 0$, мы получим исходную балку, для которой поверхность текучести будет кусочно-гладкой поверхностью, и распределение скоростей будет подчиняться ассоциированному закону.

В качестве примера в [73] рассмотрена задача о совместном действии изгиба и растяжения или сжатия на стержень прямоугольного сечения. Обозначим продольную силу через Q_1 , изгибающий момент через Q_2 , высота сечения пусть будет h , ширина b , смещение нейтральной оси ζ . Тогда q_1 представляет собою удлинение средней линии, q_2 — кривизну. Очевидно, что $q_1 = \zeta q_2$. Эпюра распределения напря-

жений показана на рис. 1.3.5. Подсчитывая продольную силу и изгибающий момент, найдем

$$Q_1 = 2\zeta b \sigma_T, Q_2 = \left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) b \sigma_T.$$

Исключая отсюда ζ , получим условие предельного состояния

$$F(Q_1, Q_2) = \frac{Q_1^2}{N_T^2} + \frac{Q_2}{M_T} - 1 = 0, M_T = \frac{bh^2}{4} \sigma_T, N_T = bh \sigma_T.$$

Легко проверить справедливость ассоциированного закона течения. Действительно,

$$\frac{\partial F}{\partial Q_1} = \frac{2Q_1}{N_T^2}, \frac{\partial F}{\partial Q_2} = \frac{1}{M_T}, \text{ отсюда, } \frac{\partial F}{\partial Q_1} : \frac{\partial F}{\partial Q_2} = \zeta.$$

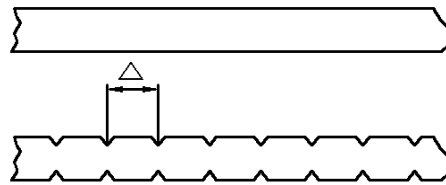


Рис. 1.3.4

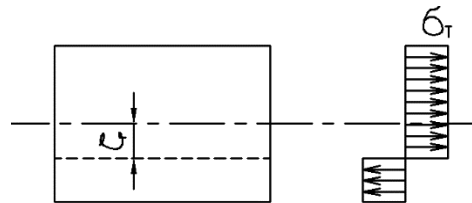


Рис. 1.3.5

Поскольку мы имеем дело с двумя обобщенными силами в сечении, поверхностью нагружения будет кривая в плоскости NM , состоящая из дуг двух парабол (рис. 1.3.6). Вектор \vec{q} направлен по нормали к кривой. В точках A и B направление нормали неопределенно, следовательно, вектор скорости \vec{q} может принимать любое направление внутри угла, образованного нормальными к каждой из парабол в точке их пересечения. Действительно, если стержень переведен в пластическое состояние путем растяжения, то деформация его будет не обязательно деформацией только растяжения.

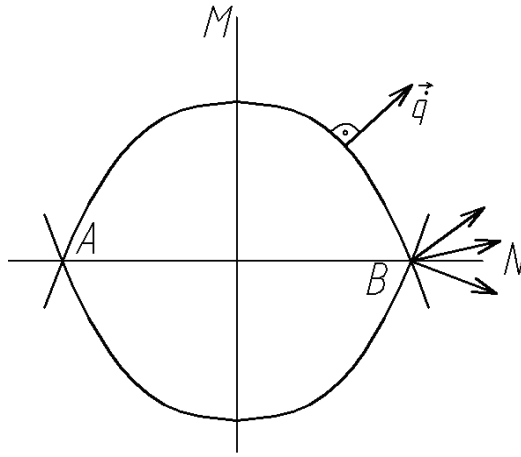


Рис. 1.3.6

Он может одновременно изгибаться произвольным образом, единственное ограничение состоит в том, чтобы при этом не было разгрузки, следовательно, было

$$\frac{h}{2} \leq |\zeta| \leq \infty.$$

1.4. Принцип максимума Мизеса и постулат Друккера. Ассоциированный закон деформирования

Принцип максимума Р. Мизеса формулируется следующим образом [73]. Пусть задано распределение скоростей $\dot{\varepsilon}_{ij}$, которому соответствует поле напряжений σ_{ij} . Мощность диссипации \dot{D} определяется следующим образом:

$$\dot{D} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (1.4.1)$$

Здесь $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ – тензор скоростей пластической деформации.

Утверждается, что для истинного напряженного состояния мощность диссипации не меньше, чем для любого допустимого состояния σ_{ij}^* , т.е. такого, что во всех точках тела $f(\sigma_{ij}^*) \leq 0$. Итак,

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (1.4.2)$$

Это условие записывают следующим образом:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0. \quad (1.4.3)$$

Д. Друккером было высказано следующее утверждение: новая необратимая деформация в упруго–пластических телах не может возникнуть самопроизвольно;

для ее создания нужно затратить энергию. В дальнейшем это положение было развито в его многочисленных работах (см., например, [27]), и был назван постулатом устойчивости материала. Согласно мнению самого Д. Друккера [27], постулат устойчивости материала является не законом природы, а средством, позволяющим дать общую классификацию материалов, которая выходит за пределы понятий, охватывающих специальные категории: упругость, пластичность, вязкость и т.д. Для материалов с независимыми от времени свойствами критерий устойчивости в малом для произвольного ненулевого нагружения имеет следующий вид:

$$\delta\sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} > 0. \quad (1.4.4)$$

Критерий устойчивости в малом для произвольного цикла нагрузки и разгрузки имеет вид:

$$\delta\sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij}^p \geq 0. \quad (1.4.5)$$

В теории пластичности доказывают (например, [40]), что если условие (1.4.5) выполняется, то поверхность нагружения является выпуклой, а вектор $\overrightarrow{\delta\varepsilon^p}$ направлен по внешней нормали к этой поверхности в точке соответствующего напряженного состояния. Условие (1.4.5) выполняется, если состояние материала соответствует участкам ОА, АВ, ВС диаграммы деформирования $\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$ (рис. 1.4.1), и не выполняется для состояний материала, характеризующихся нисходящим участком CD этой диаграммы.

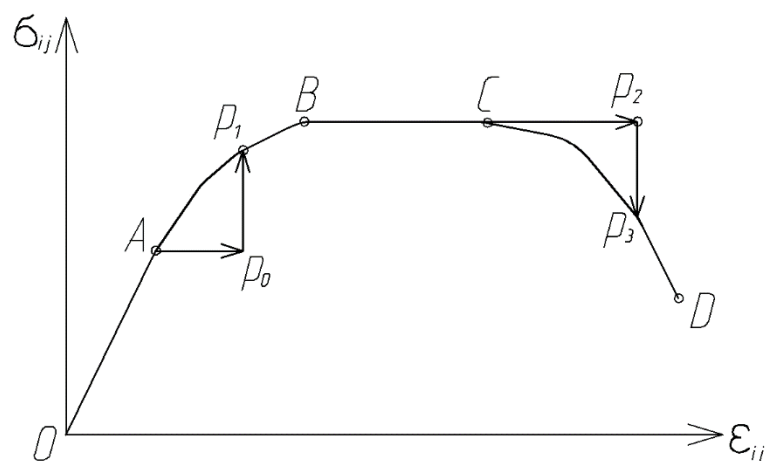


Рис. 1.4.1

Предполагая справедливой концепцию поверхности нагружения и неравенство (1.4.5) можно заключить, что в регулярной точке поверхности нагружения

$$\delta \varepsilon_{ij}^p = \delta \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}; \quad f = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} \geq 0. \quad (1.4.6)$$

Здесь $\delta \lambda = \delta \lambda(\delta \varepsilon_{ij}^p) \geq 0$ – скалярный коэффициент. Для конической точки поверхности нагружения считают справедливым подход, основанный на следующем предположении: поверхность нагружения в каждый момент времени представляется как огибающая конечного или бесконечного числа регулярных поверхностей f_α , каждая из которых обладает всеми свойствами поверхности нагружения. Единичное приращение пластической деформации, происходящее при изменении любой из регулярных поверхностей, дается соотношениями (1.4.6), где вместо $\delta \lambda$ и f нужно представить $\delta \lambda_\alpha$ и f_α , а полное приращение пластической деформации определяется как сумма единичных приращений (следует отметить, что это предположение апеллирует к принципу независимости действия пластических механизмов). Для конической точки поверхности нагружения при таком подходе справедливы следующие соотношения:

$$\delta \varepsilon_{ij}^p = \sum_{\alpha=1}^N \delta \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}}; \quad f_\alpha = 0; \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} \geq 0. \quad (1.4.7)$$

Здесь отличны от нуля только те $\delta \lambda_\alpha$, для которых выполняются условия, указанные в (1.4.7).

Как справедливо отмечено в книге [40] В.Д. Ключникова, независимость действия пластических механизмов – явление, не свойственное нелинейной механике. Однако соотношения (1.4.7) нашли довольно широкое применение в теории пластичности. Это объясняется их относительной простотой. Формулы (1.4.6), (1.4.7) являются соотношениями теории пластического течения и они позволяют решать геометрически и физически нелинейные задачи теории пластичности, двигаясь малыми шагами вдоль диаграммы $\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$.

Соотношения в (1.4.6), (1.4.7), связывающие $\delta \varepsilon_{ij}^p$ с σ_{ij} , ассоциированы (связаны) с функцией нагружения f , и поэтому их называют ассоциированными законами пластичности.

Следует отметить, что в принципе возможны соотношения пластичности, не удовлетворяющие условию градиентальности, но случай этот нужно отнести к разряду необычных и считать оправданным только тогда, когда явным образом обнаруживается структурная неустойчивость материала [40].

1.5. Постановка задачи о предельном равновесии тел

Общая постановка задачи об оценке несущей способности элемента конструкции состоит в следующем ([73], [33]). На части поверхности $S_{\dot{u}}$ заданы мгновенные скорости перемещений \dot{u}_i^s , на части поверхности S_p заданы усилия μp_i , где μ – неопределенный множитель (могут присутствовать нагрузки, которые не зависят от параметра μ). Требуется оценить несущую способность конструкции, т.е. то значение параметра нагрузки μ_p , при котором конструкция превращается в механизм, имеющий, как минимум, одну степень свободы.

Соответствующая интенсивность действующей нагрузки называется предельной. Предельной интенсивности нагрузки, называемой также часто несущей способностью тела или конструкции, соответствуют некоторые величины напряжений, удовлетворяющие условию прочности, и скорости деформаций, которые связаны с напряжениями посредством ассоциированного закона течения.

Для решения поставленной задачи привлекаются следующие соотношения:

1. Уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0; \quad i, j = \overline{1,3}. \quad (1.5.1)$$

2. Граничные условия для напряжений

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \quad \text{на} \quad S_p \quad (1.5.2)$$

3. Кинематические граничные условия

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^s \quad \text{на} \quad S_{\dot{u}}. \quad (1.5.3)$$

4. Соотношения ассоциированного закона деформирования

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1.5.4)$$

5. Уравнение поверхности нагружения, соответствующие предельному состоянию (уравнение поверхности текучести или поверхности прочности)

$$f(\sigma_{ij}) = 0. \quad (1.5.5)$$

Поля скоростей перемещений и скоростей деформаций могут иметь допустимые разрывы и связаны между собой соотношениями

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}). \quad (1.5.6)$$

Решение полной системы уравнений (1.5.1) – (1.5.6) в общем случае является чрезвычайно сложной задачей. Аналитические решения о несущей способности конструкций получены только для ограниченного круга задач.

1.6. Уравнение баланса мощностей

Вариационные принципы механики являются исключительно мощным средством исследования конструкций. Хотя соответствующие системы разрешающих уравнений механики сплошной среды вытекают как условия стационарности определенных функционалов, тем не менее, вариационные формулировки имеют ряд преимуществ [15]. В частности, вариационные принципы иногда приводят к формулам для верхней и нижней оценок точного решения задачи. Основой для вариационной формулировки задач во многих случаях служит принцип возможных перемещений (принцип виртуальной работы) [13], который можно сформулировать так: пусть механическая система, на которую наложены заданные геометрические связи, находится в равновесии под действием приложенных сил. Тогда виртуальная работа $\delta'W$ всех внешних и внутренних сил, действующих на эту систему, на любых бесконечно малых виртуальных перемещениях, удовлетворяющих заданным геометрическим связям, равна нулю:

$$\delta'W = 0. \quad (1.6.1)$$

Здесь $\delta'W$ не является вариацией некоторой функции состояния W , а всего лишь означает полную виртуальную работу. Тем не менее, из (1.6.1) следуют для многих важных, для практики, случаев соотношения, которые имеют явно вариационный

характер.

Принцип виртуальной работы остается справедливым независимо от соотношений напряжения – деформации и существования потенциальных функций. Для тел, имеющих жесткие (недеформируемые) области и разрывные поля напряжений и деформаций (перемещений) уравнение (1.6.1) имеет следующий вид [33]:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \sum_l \int_{S_l} \sigma_{ij} n_j [\delta u_i] dS - \int_S p_i \delta u_i dS - \int_V X_i \delta u_i dV = 0. \quad (1.6.2)$$

Здесь V – объем тела, S – поверхность тела; S_l – l -ая поверхность разрыва виртуальных перемещений; $\sigma_{ij} n_j$ – компоненты напряжений на S_l ; l – номер поверхности разрыва виртуальных перемещений; n_j – компоненты нормали к соответствующей поверхности; $[\delta u_i]$ – величина разрыва виртуального перемещения; p_i – компоненты вектора поверхностной нагрузки; X_i – компоненты вектора объемной нагрузки; $i, j = \overline{1,3}$.

Уравнения статической теории пластичности не содержат времени; однако, разделив их на dt , (t – монотонно возрастающий параметр) можно формально перейти от приращений $d\varepsilon_{ij}$ к скоростям деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}$. После деления (1.6.2) на dt с учетом сказанного, получим

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV + \sum_l \int_{S_l} \sigma_{ij} n_j [\dot{u}_i] dS - \int_S p_i \dot{u}_i dS - \int_V X_i \dot{u}_i dV = 0. \quad (1.6.3)$$

Это уравнение является уравнением баланса мощностей всех сил, действующих на рассматриваемое тело. В научной литературе оно приводится под различными названиями. Например, в книге [38] – "основное энергетическое уравнение"; в книге [33] – "принцип виртуальной мощности"; в книге [35] – "уравнение скорости виртуальных работ"; в книге Ю.Н. Работнова [73] – "уравнение равновесия в форме Лагранжа".

1.7. Экстремальные свойства предельных состояний деформирования

Две теоремы, приведенные ниже, позволяют получить нижнюю и верхнюю

оценки для предельного значения параметра нагружения. Эти теоремы были впервые сформулированы и доказаны А.А. Гвоздевым в малодоступной публикации 1934 г.; они многократно переоткрывались независимо разными авторами.

1.7.1. Статическая теорема

Пусть совокупность сил Q_i^* соответствует допустимому состоянию. Тогда конец вектора \vec{Q}^* лежит внутри поверхности текучести, как показано на рис. 1.7.1.

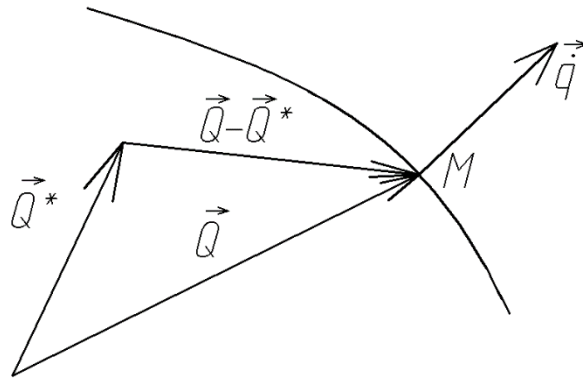


Рис. 1.7.1

Истинное состояние текучести изображается вектором \vec{Q} , а соответствующая скорость направлена по нормали к поверхности в точке M . Вследствие выпуклости поверхности текучести вектор $\vec{Q} - \vec{Q}^*$ всегда составляет острый угол с вектором \vec{q} . Поэтому скалярное произведение их положительно:

$$(\vec{Q} - \vec{Q}^*) \cdot \vec{q} > 0. \quad (1.7.1.1)$$

Из неравенства (1.7.1.1) вытекает приближенный метод определения предельной нагрузки. Запишем неравенство (1.7.1.1) в следующем виде:

$$\vec{Q}\vec{q} \geq \vec{Q}^*\vec{q}. \quad (1.7.1.2)$$

Знак равенства возможен только тогда, когда выбранное статически возможное состояние совпадает с допустимым. В случае, если на систему действует только одна сила \vec{Q} , неизвестная скорость \vec{q} в обеих частях неравенства (1.7.1.2) сократится, и мы получим

$$|\vec{Q}| \geq |\vec{Q}^*|.$$

Таким образом, нагрузка, соответствующая произвольному статически возможному состоянию системы, меньше, чем допустимая нагрузка. Этот вывод остается справедливым и для системы сил, действующих на тело, если сравниваются нагрузки, отличающиеся пропорциональным изменением всех сил [73].

Рассматривая различные статически возможные состояния, мы будем находить различные нагрузки, каждая из которых является приближением снизу для истинной предельной нагрузки. Наилучшим приближением, согласно доказанной теореме, будет то, для которого нагрузка получается наибольшей.

Метод приближенного определения предельной нагрузки путем подбора статически возможного состояния называется *статическим методом*. Таким образом, в случае перебора всех статически возможных состояний и нахождения такого состояния, которому соответствует наибольшее значение нагрузки, то это значение будет точным.

Возможными состояниями системы, состоящей из пластических элементов, будут такие, для которых условие текучести не нарушено $F(Q_i) \leq 0$.

Запишем эти же соотношения применительно к уравнению баланса мощностей.

Распределение напряжений σ_{ij}^- — называют статически допустимым, если оно удовлетворяет всюду в теле уравнениям равновесия, граничным условиям в усилиях на S_p и всюду в теле не выходит за пределы поверхности нагружения, т.е. $f(\sigma_{ij}^-) \leq 0$.

Пусть σ_{ij} , $\dot{\varepsilon}_{ij}$, \dot{u}_i — неизвестное нам истинное решение задачи о предельном состоянии тела, подверженного действию системы поверхностных сил p_i , σ_{ij}^- — некоторое допустимое напряженное состояние, соответствующие поверхностным силам p_i^- . Для краткости изложения примем, что объемные силы и разрывы скоростей перемещений отсутствуют (это не влияет на общность выводов, [38]). Запишем уравнение баланса мощностей (1.6.3) для рассматриваемых случаев, принимая за поле виртуальных скоростей истинное поле скоростей:

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_S p_i \dot{u}_i dS, \quad (1.7.1.3)$$

$$\int_V \sigma_{ij}^- \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_S p_i^- \dot{u}_i dS. \quad (1.7.1.4)$$

Вычитая (1.7.1.4) из (1.7.1.3), получим:

$$\int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^-) \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_S (p_i - p_i^-) \dot{u}_i dS. \quad (1.7.1.5)$$

Из постулата Друккера следует, что левая часть уравнения (1.7.1.5) неотрицательна, поэтому неотрицательна и правая часть:

$$\begin{aligned} \int_S (p_i - p_i^-) \dot{u}_i dS &= \int_{S_u} (p_i - p_i^-) \dot{u}_i dS + \int_{S_p} (p_i - p_i^-) \dot{u}_i dS = \int_{S_u} (p_i - p_i^-) \dot{u}_i^S dS \geq 0 \\ \int_{S_u} p_i \dot{u}_i^S dS &\geq \int_{S_u} p_i^- \dot{u}_i^S dS. \end{aligned} \quad (1.7.1.6)$$

Здесь учтено, что на S_u скорости перемещений заданы, т.е. $\dot{u}_i = \dot{u}_i^S$, а на S_p заданы силы, т.е. $p_i^- = p_i$.

Итак, мощность действительных поверхностных сил на заданных скоростях больше мощности, развиваемой поверхностными силами, соответствующими любой другой статически возможной системе напряжений.

Это утверждение составляет содержание так называемой статической теоремы о предельном состоянии. Неравенство (1.7.1.6) служит для нижней оценки несущей способности тела. Если внешняя нагрузка сводится к одной обобщенной силе \bar{Q} , которой соответствует обобщенная скорость перемещения $\bar{\dot{q}}$, то

$$\int_{S_u} p_i \dot{u}_i^S dS = \bar{Q} \bar{\dot{q}};$$

в этом случае в неравенстве (1.7.1.6) скорость $\bar{\dot{q}}$ сокращается и получается оценка несущей способности

$$|\bar{Q}| \geq |\bar{Q}^-| \quad (1.7.1.7)$$

Если нагрузки заданы в виде μp_i^0 , а статически допустимые напряжения σ_{ij}^- удовлетворяют условиям $\sigma_{ij}^- n_j = \mu^- p_i^0$ на S_p , то μ можно принять за обобщенную

силу, а скорость обобщенного перемещения будет равна $\int_{S_{ii}} p_i^0 \dot{u}_i^S dS$. Тогда неравен-

ство (1.7.1.7) принимает вид

$$\mu_0 \geq \mu^- . \quad (1.7.1.8)$$

Здесь μ_0 – опасное значение параметра μ .

1.7.2. Кинематическая теорема

Для того чтобы статически возможное состояние жесткопластической системы было действительным состоянием предельного равновесия, нужно, чтобы это состояние было в то же время кинематически возможным; это значит, что свобода пластической деформации, связанная с переходом отдельных элементов в пластическое состояние, должна иметь возможность реализоваться на самом деле [73].

Обозначим \dot{q}_i^* (и соответственно \dot{r}_s^*) – кинематически возможное поле скоростей, определенное с точностью до постоянного множителя. Пусть Q_i – истинные, неизвестные значения сил в предельном состоянии. Составим уравнение равновесия в форме Лагранжа, приняв выбранное кинематически возможное поле скоростей за поле виртуальных скоростей. Получим:

$$Q_i \dot{q}_i^* = R_s \dot{r}_s^* .$$

Здесь Q_i – внешние силы, R_s – внутренние силы (обобщенные). В истинном состоянии ни в одном из элементов усилие не может превзойти усилия текучести или момент – предельного момента текучести. Поэтому $R_s \leq R_s^* \leq R_{st}$. Здесь R_s^* – внутренние силы, соответствующие \dot{r}_s^* согласно ассоциированному закону, R_{st} – предельное значение этих сил. Запишем следующее неравенство:

$$Q_i \dot{q}_i^* \leq R_{st} \dot{r}_s^* . \quad (1.7.2.1)$$

С другой стороны, определим поле внешних сил Q_i^* так, что для данного кинематически возможного состояния

$$Q_i^* \dot{q}_i^* = R_{st} \dot{r}_s^* . \quad (1.7.2.2)$$

Очевидно, что состояние системы под действием сил Q_i^* , вообще говоря, не

будет статически допустимым, в каком-то из элементов, для которого соответствующее $r^* = 0$, усилие может быть больше предельного. Сравнивая (1.7.2.1) и (1.7.2.2), находим

$$Q_i^* \dot{q}_i^* \geq Q_i \dot{q}_i^*. \quad (1.7.2.3)$$

Неравенство (1.7.2.3) служит основанием для кинематического метода. Если на систему действует только одна обобщенная сила \bar{Q} , то

$$|\bar{Q}| \leq |\bar{Q}^*| = \frac{R_{st} \dot{r}_s}{\dot{q}}. \quad (1.7.2.4)$$

Таким образом, кинематический метод дает верхнюю оценку для несущей способности. Если число кинематических состояний конечно, то наименьшая из получающихся оценок представляет собою точную величину несущей способности.

Кинематический метод значительно более прост и удобен для применения, чем статический метод, и поэтому находит гораздо более широкое применение.

Рассмотрим суть кинематической теоремы о предельном состоянии, используя уравнение баланса мощностей [73]. Пусть \dot{u}_i^+ – произвольное кинематически допустимое поле скоростей перемещений, т.е. такое поле, которое удовлетворяет граничным условиям $\dot{u}_i^+ = \dot{u}_i^s$ на части поверхности S_{ii} . По значениям \dot{u}_i^+ , используя (1.5.6), можно определить соответствующие скорости деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^+$, далее, используя (1.5.4), – напряжения σ_{ij}^+ . В общем случае напряжения σ_{ij}^+ не удовлетворяют уравнениям равновесия. Запишем уравнение равновесия в форме Лагранжа, принимая \dot{u}_i^+ за поле виртуальных скоростей:

$$\int_S p_i \dot{u}_i^+ dS = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^+ dV.$$

Прибавим и вычтем в правой части этого равенства интеграл от $\sigma_{ij}^+ \dot{\epsilon}_{ij}^+$. Получим

$$\int_S p_i \dot{u}_i^+ dS = \int_V \sigma_{ij}^+ \dot{\epsilon}_{ij}^+ dV - \int_V (\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^+ dV.$$

Согласно постулату Друккера второй член в правой части этого равенства неотрицателен, поэтому

$$\int_S p_i \dot{u}_i^+ dS \leq \int_V \sigma_{ij}^+ \dot{\varepsilon}_{ij}^+ dV. \quad (1.7.2.5)$$

Если внешняя нагрузка представляется одной обобщенной силой Q , то

$$Q \leq \frac{1}{\dot{q}^+} \int_V \sigma_{ij}^+ \dot{\varepsilon}_{ij}^+ dV. \quad (1.7.2.6)$$

Правая часть этого неравенства известна, если задано кинематически возможное поле скоростей \dot{u}_i^+ .

Неравенство (1.7.2.5) служит для верхней оценки несущей способности. Из (1.7.2.6) следует, что действительная предельная нагрузка не больше кинематически возможной нагрузки. (Кинематически возможной называют нагрузку, при действии которой конструкция превращается в механизм при соблюдении наложенных на нее кинематических связей).

При решении задач кинематическим методом, используются уравнение принципа виртуальной мощности и кинематические краевые условия, записанные для скоростей перемещений. Уравнение принципа виртуальной мощности в этом случае записывается в виде

$$\int_V Q_i \dot{q}_i dV + \sum_l \int_{S_l} Q_l \Delta \dot{u}_i dS_l = \int_S p_i \dot{u}_i dS + \int_V X_i \dot{u}_i dV. \quad (1.7.2.7)$$

где S_l - l -я поверхность разрыва скорости перемещений, l - номер поверхности разрыва скорости перемещений, $\Delta \dot{u}_i$ – величины разрыва скорости перемещения. В результате решения задачи определяются значение p_k и кинематически возможное поле скоростей перемещений.

1.7.3. Кинематический и статический методы определения несущей способности конструкций. Сведение задачи к задаче линейного программирования

Применяя оценки (1.7.1.7) и (1.7.2.6), можно получить интервал, в котором заключено истинное значение предельной нагрузки Q . Если верхняя и нижняя оценки совпадают, то получено точное решение задачи о несущей способности (доказательство соответствующей теоремы о единственности решения можно найти, например, в книге [73]).

Нахождение кинематически возможных полей скоростей, которые не обязательно должны быть непрерывными, не встречает больших трудностей; варьируя эти поля, находят нижнюю грань $\inf Q^+$, определяемую неравенством (1.7.2.6). Эта величина $\inf Q^+$ может совпасть с точным решением, а может являться наилучшим приближением в определенном классе возможных кинематических схем пластического деформирования.

Построение статически допустимых полей встречает бóльшие трудности, связанные главным образом с тем, что определенные в пластических областях поля напряжений должны допускать продолжения в жесткие зоны, притом такое, что условие пластичности нигде не превышает. Варьируя поле допустимых напряжений σ_{ij}^- , можно найти верхнюю грань $\sup Q^-$, определяемую неравенством (1.7.1.6). Это значение может совпасть с точным решением, а может являться наилучшим приближением снизу в определенном классе статически допустимых напряжений.

Параметр внешней нагрузки μ^- , удовлетворяющий неравенству (1.7.1.6), называют статически допустимым; значение μ^+ этого параметра, удовлетворяющий неравенству (1.7.2.5), называют кинематически возможным.

Для сужения "вилки"

$$\mu^- \leq \mu_0 \leq \mu^+ \quad (1.7.3.1)$$

часто используют методы математического, в частности, линейного, программирования.

Общая задача линейного программирования заключается в следующем [43].
Дана линейная целевая функция

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \tag{1.7.3.2}$$

и система линейных ограничений

[illegible]

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.7.3.4)$$

где $n > m$; a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины.

Необходимо найти такие неотрицательные значения x_1, x_2, \dots, x_n , которые удовлетворяют системе ограничений (1.7.3.3) и доставляют целевой функции (1.7.3.2) минимальное значение. Общая задача линейного программирования имеет несколько форм записи. Наиболее широко используемым методом решения общей задачи линейного программирования является так называемый симплекс – метод.

Планом, или допустимым решением, задачи линейного программирования называют вектор $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$, удовлетворяющий условиям (1.7.3.3), (1.7.3.4).

Оптимальным планом или оптимальным решением задачи линейного программирования называют план, доставляющий наименьшее значение целевой функции (1.7.3.2).

В статическом методе решения задачи о несущей способности тела используют уравнения равновесия (1.5.1), (1.5.2) и уравнение предельной поверхности (1.5.5). Если $f(\sigma_{ij})$ в (1.5.5) является нелинейной функцией, то предельную поверхность аппроксимируют вписанным или описанным многогранником. Используя одно из уравнений равновесия, находят выражение для μ^- (целевая функция), остальные соотношения образуют систему ограничений задачи линейного программирования.

В кинематическом методе используют уравнение баланса мощностей (1.6.3), кинематические граничные условия (1.5.3), уравнение предельной поверхности (1.5.5), соотношения ассоциированного закона деформирования (1.5.4) и соотношения (1.5.6). Используя (1.6.3) определяют выражение для μ^+ (целевая функция) и некоторое интегральное ограничение, остальные ограничения задачи линейного программирования следуют из других используемых в этом методе соотношений.

Дискретизацию объекта расчета осуществляют, в большинстве случаев, с использованием метода конечных разностей, или метода конечных элементов.

1.7.4. Пример определения разрушающей нагрузки для железобетонной

прямоугольной плиты при учете только изгибающих моментов

Рассмотрим, например, прямоугольную плиту длиной $l = 4$ м, шириной $b = 1$ м, защемленную по контуру и находящуюся под воздействием равномерно распределенной нагрузки интенсивности p , направленной перпендикулярно срединной плоскости плиты. Плита при деформировании разделяется на жесткие элементы, между которыми образуются цилиндрические двухгранные пластические шарниры (АВ, АЕ, ..., ЕК на рис. 1.7.2). Положение шарниров в пространстве определим, минимизируя кинематически возможную нагрузку.

Уравнение принципа виртуальной мощности (1.7.2.7) в данном случае принимает вид:

$$pV = \sum_{i=1}^n M_{Ti} \theta_i l_i. \quad (1.7.4.1)$$

Здесь V – объем призмы ABCDEK (рис. 1.7.2), M_{Ti} – предельный момент для линии разрушения с номером i ($i=1,2, \dots, n$), n – число линий разрушения, l_i – длина i -й линии разрушения, θ_i – двухгранной угол взаимного поворота жестких элементов механизма разрушения вдоль i -й линии разрушения (в радианах). Здесь V имеет размерность скорости перемещения, θ – размерность скорости поворота. Нами принято, что $M_{Ti} = M_T = \text{const}$ вдоль всех шарниров пластичности:

$$M_T = R_s A_s z_b \quad (1.7.4.2)$$

Здесь R_s – расчетное сопротивление растяжению арматуры, A_s – площадь сечения арматуры, z_b – расстояние от центра тяжести сечения растянутой арматуры до центра тяжести площади сечения сжатой зоны бетона. Для прямоугольных сечений граничное значение высоты сжатой зоны $x = 0.55h_0$, $h_0 = h - a$, h – высота сечения, a – расстояние от растянутого края плиты до центра тяжести растянутой арматуры. Варьируя координаты точек Е и К (рис. 1.7.2), можно определить минимум кинематически возможной нагрузки p_k , который оценивает предельную нагрузку $p_{пр}$ сверху. При других условиях опирания плиты поступаем аналогично.

На рис. 1.7.3 приведен график зависимости p_k от расстояния s . Как видно, при некотором значении s достигается минимум оценки разрушающей нагрузки. Для

плиты размерами 4х2 м, $R_s=355$ МПа, $z_b=11$ см, $h=20$ см, $A_s=2.513$ см² нами получена оценка для разрушающей нагрузки $p = 34.7$ кПа. В книге [80] приведено аналитическое решение рассматриваемой здесь задачи, согласно которому для рассматриваемого здесь варианта, верхняя оценка разрушающей нагрузки равна 34.691 кПа.

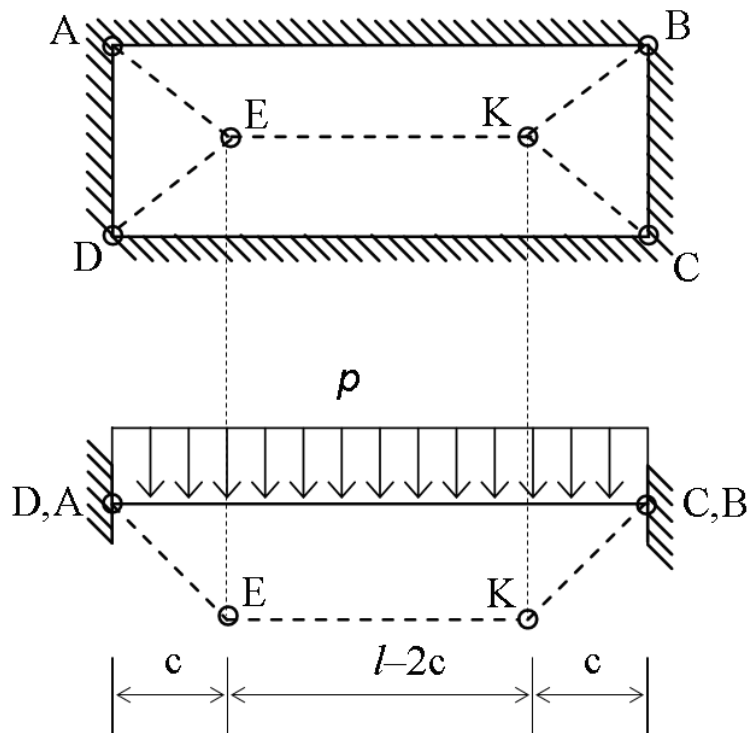


Рис. 1.7.2

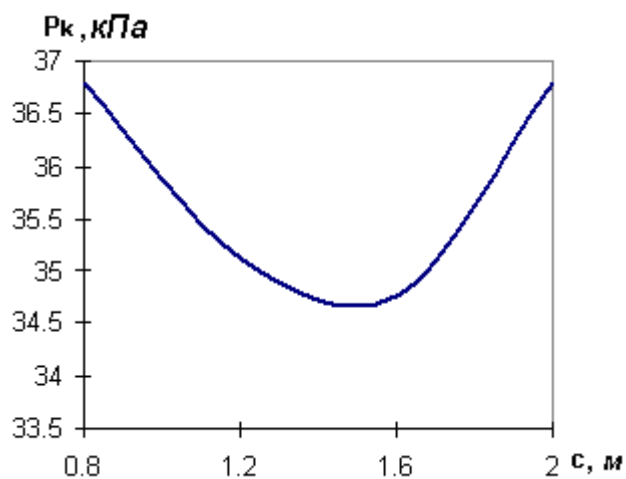


Рис. 1.7.3

2. Критерии прочности и пластичности для тонких анизотропных и композитных пластин и оболочек

2.1. Общие сведения

2.1.1. Условия прочности для материалов в напряжениях

Разрушение материала обычно связывают с его напряженным состоянием, при этом критерий прочности (разрушения) имеет вид

$$f(\sigma_{ij}, F) = 0, \quad (2.1.1.1)$$

где F - некоторые характеристики прочности материала.

Феноменологические критерии прочности типа (2.1.1.1) призваны обеспечить интерполяцию данных некоторых базовых экспериментов по определению прочностных характеристик материала на случай напряженного состояния произвольного вида.

Для изотропных материалов наибольшее применение имеют условие прочности Треска и условие прочности Мизеса.

Согласно условию Треска предельное состояние материала определяется равенством максимального касательного напряжения в точке среды пределу прочности при сдвиге $\tau^* = \sigma^* / 2$, что в главных напряжениях записывается в виде

$$\max\{|\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|, |\sigma_1 - \sigma_2|\} = \sigma^*. \quad (2.1.1.2)$$

Здесь σ^* – предел прочности на растяжение. По условию Р. Мизеса предельное состояние материала определяется уравнением

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2) = 2(\sigma^*)^2. \quad (2.1.1.3)$$

При плоском напряженном состоянии на плоскости главных напряжений σ_1, σ_2 эти условия изображаются соответственно в виде шестиугольника и кривой, описанной вокруг этого шестиугольника (рис. 2.1.1).

Обобщением условия (2.1.1.2) для анизотропных материалов является критерий Мизеса-Хилла [107], который в тензорной форме записывается в виде

$$A_{iklm} \sigma_{ik} \sigma_{lm} = 1, \quad (2.1.1.4)$$

где $i, k, l, m=1, 2, 3$. Коэффициенты A_{iklm} являются константами материала и выражаются через прочностные характеристики материала.

Для описания прочности однонаправленных волокнистых КМ при плоском напряженном состоянии критерий Мизеса-Хилла приведен к следующему виду:

$$\frac{\sigma_{11}^2}{(\sigma_{11}^*)^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{11}^*\sigma_{22}^*} + \frac{\sigma_{22}^2}{(\sigma_{22}^*)^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{(\sigma_{12}^*)^2} = 1. \quad (2.1.1.5)$$

Здесь $\sigma_{11}^*, \sigma_{22}^*, \sigma_{12}^*$ – предельные напряжения для материала при растяжении (сжатии) в первом и втором направлениях и при сдвиге соответственно.

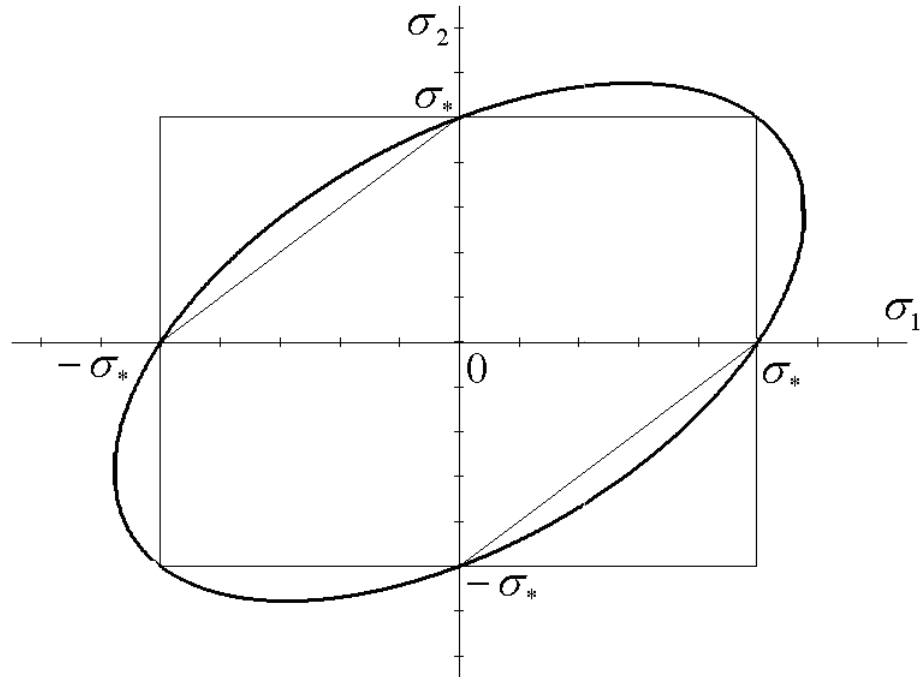


Рис. 2.1.1

Это условие позволяет достаточно хорошо описывать экспериментальные данные для некоторых однонаправленных стеклопластиков. Главный недостаток этого критерия в том, что прочностные свойства при растяжении и сжатии в одном направлении принимаются одинаковыми, а это не характерно для КМ.

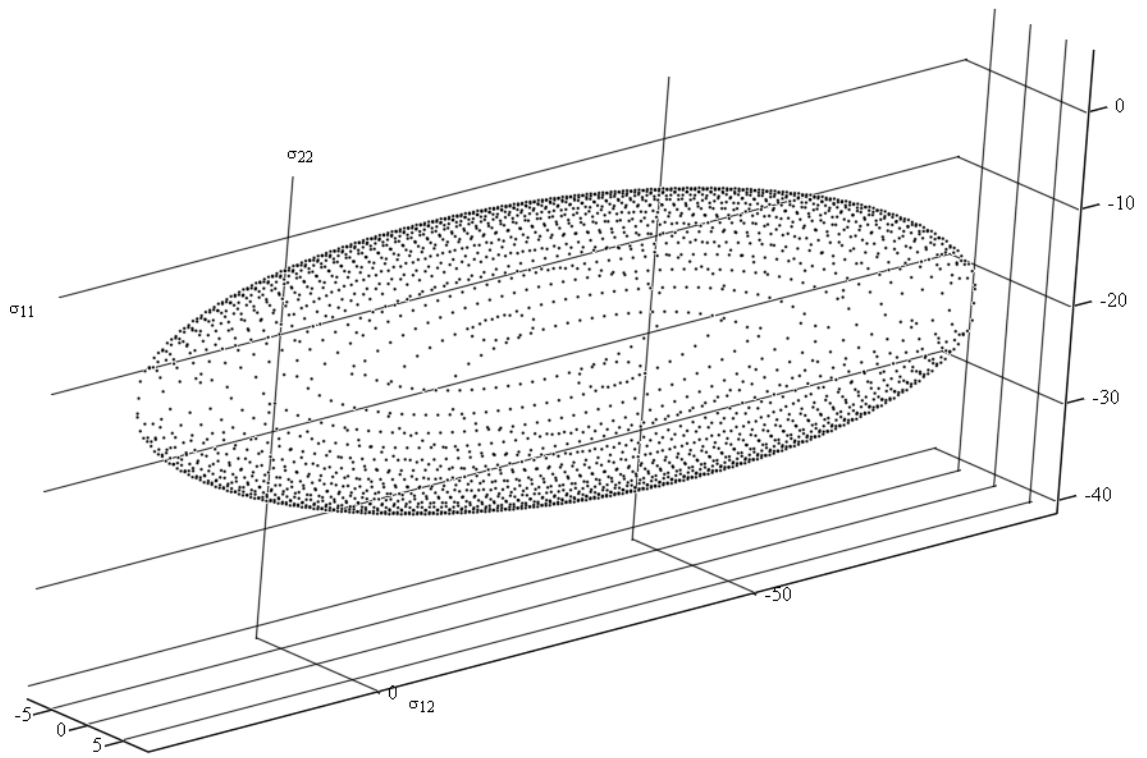


Рис. 2.1.2

В критерии К.В.Захарова учитываются различия прочностей КМ при растяжении и сжатии. Для ортотропного КМ в системе координат, совпадающей с его осями симметрии, при плоском напряженном состоянии этот критерий записывается следующим образом:

$$\sigma_{11}^2 + \left(\frac{\sigma_{11}^{(+)} \sigma_{11}^{(-)}}{\sigma_{22}^{(+)} \sigma_{22}^{(-)}} \right) \sigma_{22}^2 + \left[1 + \frac{\sigma_{11}^{(+)} \sigma_{11}^{(-)}}{\sigma_{22}^{(+)} \sigma_{22}^{(-)}} + \frac{\sigma_{11}^{(-)} - \sigma_{11}^{(+)}}{\tau^{(45)}} - \frac{\sigma_{11}^{(+)} \sigma_{11}^{(-)}}{\sigma_{22}^{(+)} \sigma_{22}^{(-)}} \cdot \frac{\sigma_{22}^{(-)} - \sigma_{22}^{(+)}}{\tau^{(45)}} - \frac{\sigma_{11}^{(+)} \sigma_{11}^{(-)}}{\tau^{(45)}} \right] \times$$

$$\times \sigma_{11} \sigma_{22} + (\sigma_{11}^{(-)} - \sigma_{11}^{(+)}) \cdot \sigma_{11} + \frac{\sigma_{11}^{(+)} \sigma_{11}^{(-)}}{\sigma_{22}^{(+)} \sigma_{22}^{(-)}} \cdot (\sigma_{22}^{(-)} - \sigma_{22}^{(+)}) \cdot \sigma_{22} - \sigma_{11}^{(+)} \sigma_{11}^{(-)} = 0,$$

где $\sigma_{ii}^{(+)}, \sigma_{ii}^{(-)}$ – пределы прочности материала при растяжении и сжатии в i -ом направлении соответственно, $\tau^{(45)}$ – предел прочности материала при сдвиге по диагональным площадкам, образующим угол 45° с осями x_1 и x_2 .

Критерий прочности Гольденבלата-Копнова [21] обобщает критерии прочности Мизеса-Хилла, Захарова и другие. В соответствии с ним материал переходит в предельное состояние при достижении критического значения некоторой функцией, зависящей только от напряжений и характеризующей данный материал [42]. В тензорной форме этот критерий записывается в виде разложения по степеням инвариантов

$$(P_{ik} \sigma_{ik})^\alpha + (P_{pqnm} \sigma_{pq} \sigma_{nm})^\beta + (P_{rstlm} \sigma_{rs} \sigma_{tl} \sigma_{nm})^\gamma + \dots \leq 1,$$

где P_{ik}, P_{pqnm}, \dots – компоненты тензоров прочности различных рангов, не зависящие от напряжений σ_{ik} и характеризующие прочность КМ; α, β, γ – показатели степени. Они выражаются через прочностные характеристики КМ, определяемые в простых опытах на трубчатых образцах при растяжении, сжатии, сдвиге и кручении.

А.К.Малмейстером [45] для описания поверхности прочности предложен тензорный ряд вида

$$p_{ij} \sigma_{ij} + p_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + p_{ijklmn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} + \dots = 1, \quad (2.1.1.6)$$

где p – тензор поверхности прочности четных рангов; σ_{ij} – тензор напряжений. В работе [105] отмечено, что для многих стекло-, угле-, борозпоксидных композитных материалов хорошее приближение дают первые два члена ряда (2.1.1.6), т.е. поверхности прочности достаточно хорошо аппроксимируются поверхностями второго порядка (см. рис. 2.1.2).

2.1.2. Краткие сведения об оболочках и пластинах

В настоящее время оболочки получили широкое распространение ввиду своей экономичности. *Оболочкой* называется тело, ограниченное двумя поверхностями и имеющее один размер (толщину) намного меньше двух других размеров. Поверхность, проходящая через точки, расположенные посередине толщины оболочки, называется срединной поверхностью оболочки (рис. 2.1.3). В оболочках постоянной толщины геометрия срединной поверхности определяет геометрию оболочки в целом.

На рис. 2.1.4 радиус кривизны – R , центр кривизны – O . Величина $k = 1/R$ называется кривизной кривой α , в окрестности точки C ; точки O_1 и O_2 – наиболее и наименее удаленные от поверхности a . Этим центрам соответствуют максимальный и минимальный (R_1 и R_2) радиусы, которые называются *главными радиусами кривизны поверхности a в точке C* . Соответственно $k_1 = 1/R_1$ и $k_2 = 1/R_2$ называются *главными кривизнами*. Им соответствуют на поверхности a линии α_1 и α_2 , называемые *линиями главных кривизн*. В любой точке поверхности линии главных кривизн

нормальны друг другу.

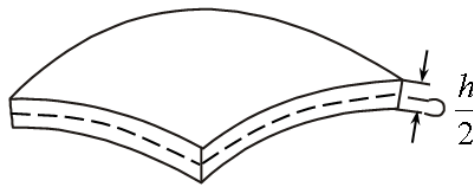


Рис. 2.1.3

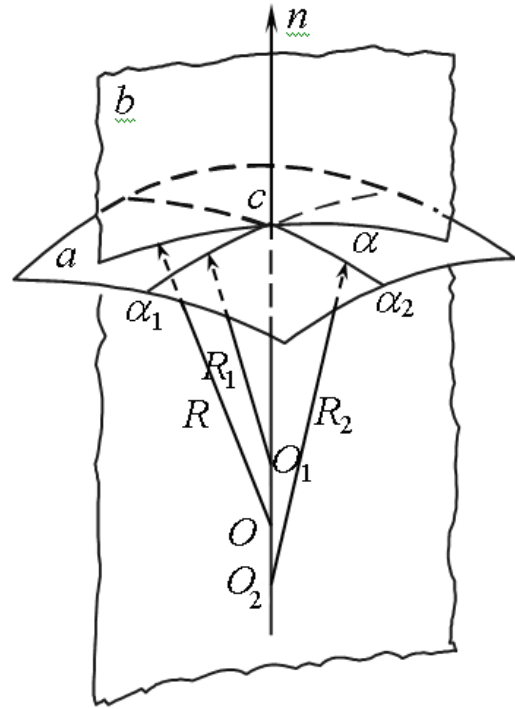


Рис. 2.1.4

На всякую поверхность можно нанести ортогональную сетку, состоящую из линий главных кривизн (рис. 2.1.5).

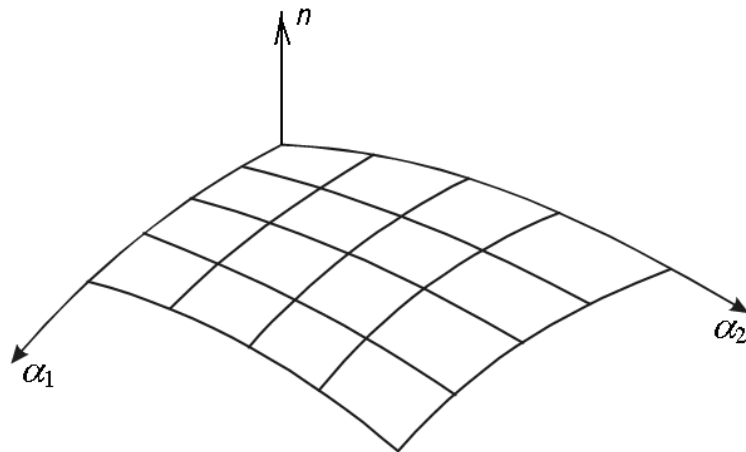


Рис. 2.1.5

Линии главных кривизн характерны еще и тем, что вдоль них отсутствует кручение поверхности. Величина

$$k = k_1 k_2 = \frac{1}{R_1 R_2} \quad (2.1.2.1)$$

называется *гауссовой кривизной*. Важной характеристикой поверхности является знак гауссовой кривизны, который зависит от того, как расположены центры главных кривизн по отношению к поверхности (рис. 2.1.6).

Гауссова кривизна срединной поверхности предопределяет общую жесткость оболочки, т.е. её способность сохранить первоначальную форму при действии внешних сил. Наиболее жестки в этом смысле оболочки со срединной поверхностью, обладающей положительной гауссовой кривизной, сокращенно называемые оболочками положительной гауссовой кривизны. Менее жестки оболочки, характеризующиеся нулевой гауссовой кривизной.

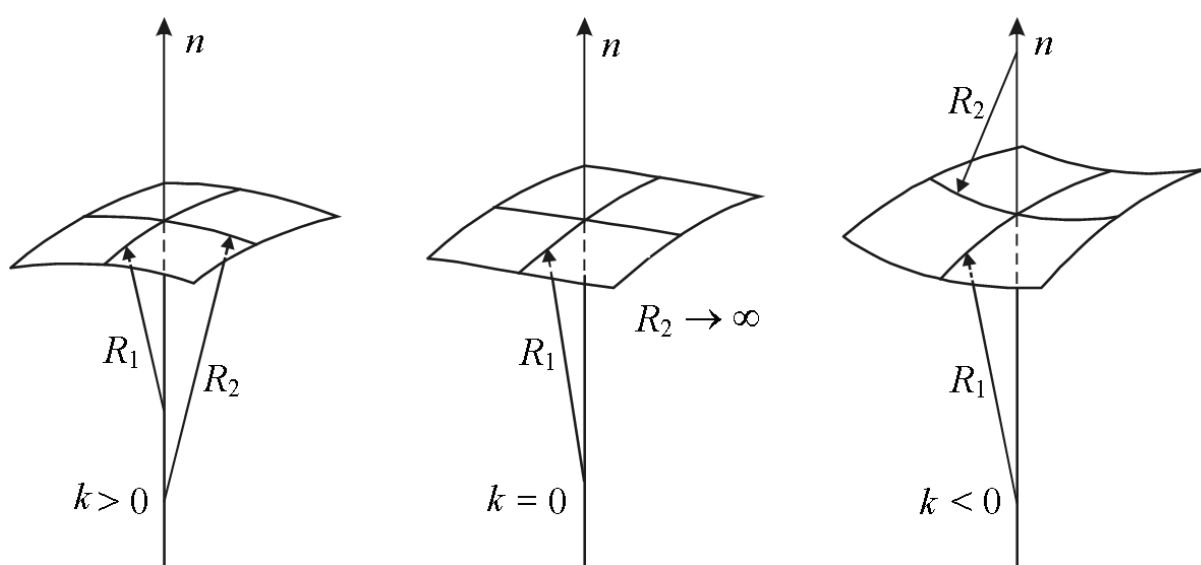


Рис. 2.1.6

Наименее жестки оболочки с отрицательной гауссовой кривизной.

Если отношение толщины оболочки h к наименьшему из главных радиусов кривизны не превышает $1/20$, то такая оболочка считается тонкой. (В реальных конструкциях покрытий это отношение может доходить до $1/200$ - $1/500$).

Внутренние усилия в оболочке делятся на две группы:

а) усилия мембранного типа (рис. 2.1.7, слева): нормальные $T_{11} \equiv T_1$, $T_{22} \equiv T_2$ и сдвигающие T_{12} , T_{21} ; такие усилия могут возникать в плоском диске или в тонкой мембране;

б) усилия моментного типа (рис. 2.1.7, справа): изгибающие моменты $M_{11} \equiv M_1$, $M_{22} \equiv M_2$, крутящие моменты M_{12} , M_{21} , поперечные силы Q_{31} и Q_{32} ; такие же усилия

могут возникать в плоских пластинках.

Для тонких оболочек можно с достаточной точностью принять, что

$$T_{12} = T_{21} \equiv T_3, \quad M_{12} = M_{21} \equiv M_3. \quad (2.1.2.2)$$

В оболочке возникают деформации: мембранные e_1, e_2, e_3 ; поперечного сдвига γ_1, γ_2 , деформации искривления срединной поверхности $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и кручения ε_3 .

Перемещение оболочки обычно характеризуется тремя проекциями перемещения рассматриваемой точки срединной поверхности на координатные оси x, y и z . Эти проекции обозначаются через u, v и w (рис. 2.1.8а).

Между усилиями и деформациями существует такое соответствие:

усилия $T_1, T_2, T_3, M_1, M_2, M_3, Q_{31}, Q_{32}$ совершают работу на

деформациях $e_1, e_2, e_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2$ соответственно.

Каждая из этих величин является функцией двух координат α_1, α_2 (в общем случае – криволинейных).

Внешняя нагрузка, действующая на оболочку, задается в виде проекций на координатные оси x, y и z , причем проекции обозначаются через \bar{X}, \bar{Y} и \bar{Z} (рис. 2.1.8б).

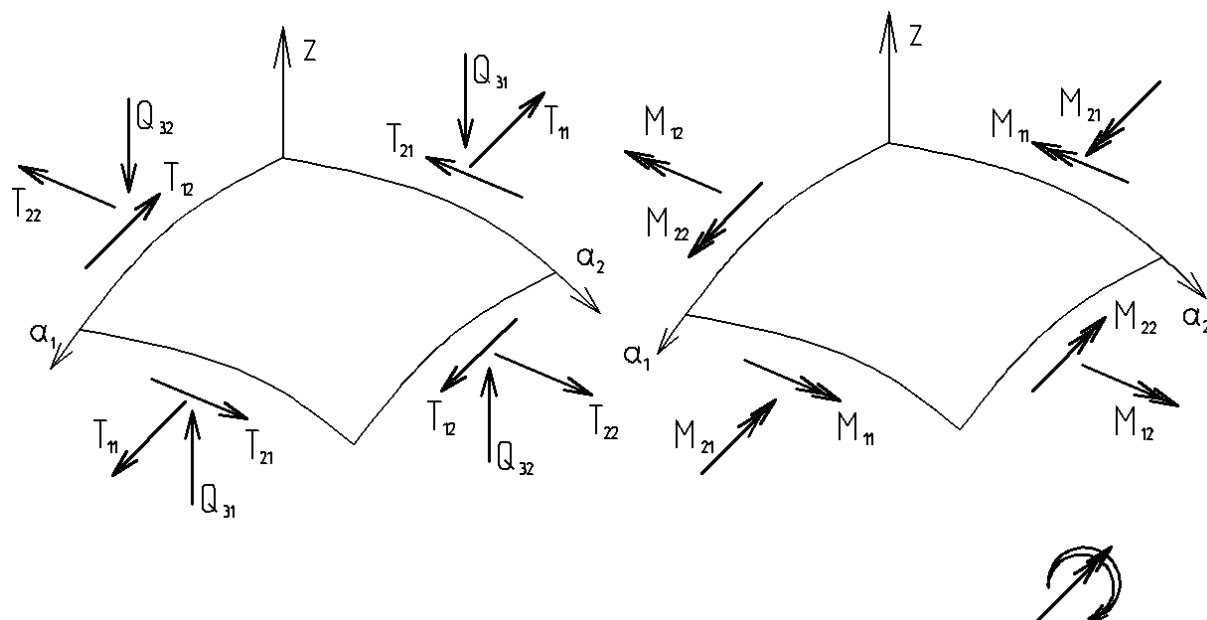


Рис. 2.1.7

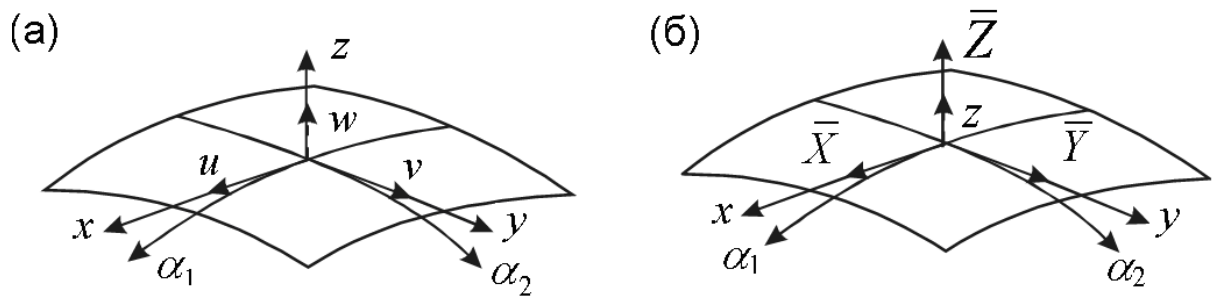


Рис. 2.1.8

Если в какой-либо области оболочки действуют только мембранные усилия, то такое напряженное состояние называется *безмоментным*. При этом напряжения в поперечных сечениях распределяются равномерно по толщине, и несущая способность материала используется наиболее полно. Поэтому с применением оболочек можно перекрывать в десятки раз большие пролеты, чем с применением пластинок той же толщины, благодаря чему оболочки оказываются весьма экономичными конструкциями. При проектировании оболочек нужно стремиться к тому, чтобы усилия моментного типа были, возможно, меньше по величине и действовали в ограниченных областях.

В линейной теории тонких оболочек, как известно [62], имеют место гипотезы Кирхгоффа-Лява:

- прямолинейные и нормальные к срединной поверхности волокна недеформированной оболочки остаются прямолинейными и нормальными к деформированной срединной поверхности;
- нормальные напряжения на площадках, параллельных площадям срединной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с другими нормальными напряжениями.

Вследствие этих гипотез имеем:

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \dot{e}_{\alpha\beta} + \dot{\kappa}_{\alpha\beta} z, \dot{\varepsilon}_{\alpha 3} = 0, \alpha, \beta = 1, 2; \quad (2.1.2.3)$$

$$|\sigma_{33}| \approx 0. \quad (2.1.2.4)$$

Здесь $\dot{e}_{\alpha\beta}$ – скорости деформаций срединной поверхности, $\dot{\kappa}_{\alpha\beta}$ – скорости изменения кривизны срединной поверхности. $\dot{e}_{\alpha\beta}, \dot{\kappa}_{\alpha\beta}$ в дальнейшем будут рассматриваться как скорости обобщенных перемещений.

Обобщенными силами являются внутренние силы и моменты, которые выражены через компоненты напряжений соотношениями

$$T_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dz, \quad Q_{\alpha 3} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dz, \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} z dz; \quad \alpha, \beta = \overline{1,2}. \quad (2.1.2.5)$$

Положительные направления сил и моментов показаны на рис. 2.1.7.

Пластинкой называется призматическое или цилиндрическое тело, высота (толщина) которого h мала по сравнению с размерами в плане (рис. 2.1.9).

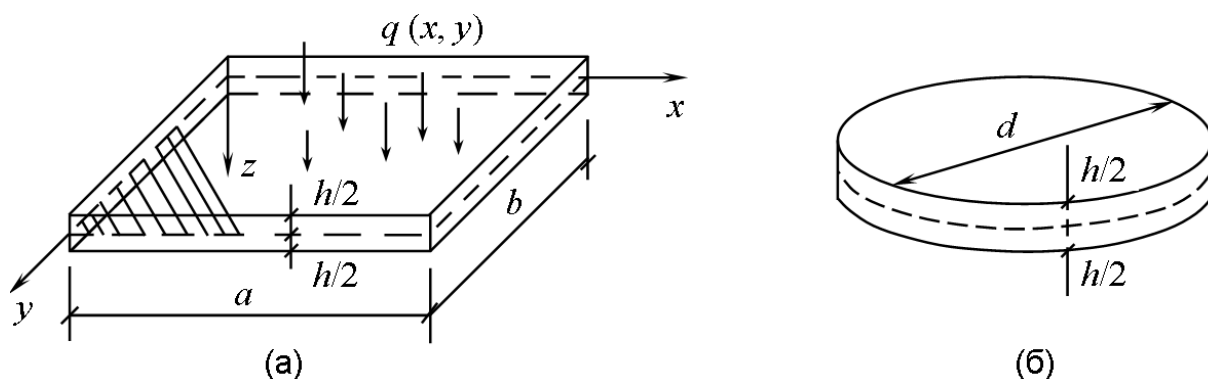


Рис. 2.1.9

Плоскость (в деформированном состоянии поверхность), делящая толщину пластинки пополам, называется срединной. На рис. 2.1.9 она частично заштрихована. След от пересечения срединной плоскости с боковой поверхностью называется контуром пластинки.

Тонкими считаются пластинки, у которых отношение толщины к наименьшему размеру в плане h/a находится в пределах $1/8 \div 1/80$, а наибольший прогиб не превышает $0,25h$. Если толщина больше, чем допускает первое условие, то это толстая плита. Если прогиб больше, чем допускает второе условие, что обычно происходит если $h/a < 1/80$, то это гибкая пластинка – мембрана.

Пластинки широко распространены в технике, в том числе в строительстве. Это различные конструкции перекрытий и покрытий, фундаментные плиты и тому подобное.

Для расчета тонких пластинок применяется техническая теория, которая, кроме общих гипотез теории упругости, привлекает дополнительные гипотезы:

1. При нагрузке, параллельной оси z , все точки срединной плоскости перемещаются только вертикально. Отсюда, следует, что в срединной плоскости $u = v = 0$, а значит $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$.
2. Прямой отрезок, нормальный к срединной плоскости, остается после деформации прямым и нормальным к срединной поверхности, а длина его не меняется. Это значит, что в вертикальных сечениях пластинки отсутствуют деформации сдвига γ_{xz} и γ_{yz} , а также линейная деформация ε_z .
3. Давлением между слоями пластинки, параллельными срединной плоскости, можно пренебречь ($\sigma_z = 0$).

2.2. Уравнения гиперповерхности прочности для композитных пластин и оболочек

В работе [102] приведен вывод уравнений гиперповерхности прочности для композитных оболочек. Пусть композиционный материал образован путем наложения n ортотропных слоев, работающих совместно. Проскальзывание между слоями отсутствует. Произвольный слой с номером j ($j = \overline{1, n}$) отнесем к системе координат $\xi_1 \xi_2 z$, связанной с некоторой поверхностью S_0 (рис. 2.2.1). Ось z ортогональна к поверхности S_0 . Ориентация j -го слоя в системе $\xi_1 \xi_2 z$ определяется углом $\varphi_j = (\xi_1, x_j)$. Система координат $(xyz)_j$ связана с j -м слоем. Ось z_j параллельна оси z .

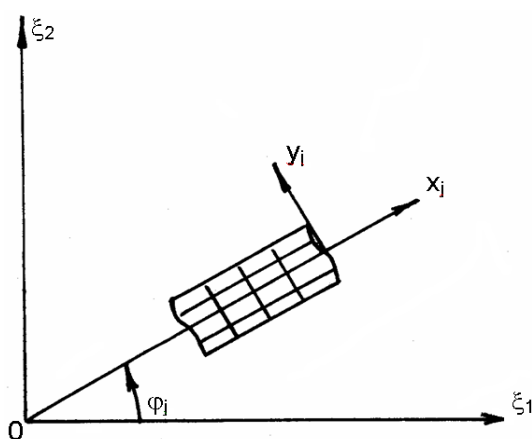


Рис. 2.2.1

Использовалось следующее уравнение предельной поверхности (поверхности прочности) для j -го слоя в системе координат $(xyz)_j$:

$$(a\sigma_{xx}^2 + 2b\sigma_{xx}\sigma_{yy} + c\sigma_{yy}^2 + 2d\sigma_{xx} + 2e\sigma_{yy} + l\sigma_{xy}^2 + m\sigma_{xz}^2 + n\sigma_{yz}^2)_j = 1. \quad (2.2.1)$$

Коэффициенты a_j, \dots, n_j этого уравнения определяются на основе результатов испытаний на прочность. Используя формулы связи компонентов тензора напряжений в системах $(xyz)_j$ и $\xi_1\xi_2z$ [98], имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^j &= \sigma_{11}^j \cos^2 \varphi_j + \sigma_{22}^j \sin^2 \varphi_j + \sigma_{12}^j \sin 2\varphi_j; \\ \sigma_{yy}^j &= \sigma_{11}^j \sin^2 \varphi_j + \sigma_{22}^j \cos^2 \varphi_j + \sigma_{12}^j \sin 2\varphi_j; \\ \sigma_{xy}^j &= (\sigma_{22}^j - \sigma_{11}^j) \sin \varphi_j \cos \varphi_j + \sigma_{12}^j \cos 2\varphi_j; \\ \sigma_{xz}^j &= \sigma_{13}^j \cos \varphi_j + \sigma_{23}^j \sin \varphi_j; \\ \sigma_{yz}^j &= \sigma_{23}^j \cos \varphi_j - \sigma_{13}^j \sin \varphi_j. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Затем, подставив (2.2.2) в (2.2.1), получаем уравнение предельной поверхности для j -го слоя в системе $\xi_1\xi_2z$:

$$\Phi \equiv (A\sigma_{11}^2 + 2B\sigma_{11}\sigma_{22} + C\sigma_{22}^2 + 2D\sigma_{11} + 2E\sigma_{22} + L\sigma_{12}^2 + 2P\sigma_{11}\sigma_{12} + 2R\sigma_{22}\sigma_{12} + 2Q\sigma_{12} + K\sigma_{13}^2 + 2M\sigma_{31}\sigma_{32} + N\sigma_{32}^2)_j - 1 = 0. \quad (2.2.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= a \cos^4 \varphi + (2b + l) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + c \sin^4 \varphi; \\ B &= (a + c - l) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi); \\ C &= a \sin^4 \varphi + (2b + l) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + c \cos^4 \varphi; \\ D &= d \cos^2 \varphi + e \sin^2 \varphi; \\ E &= d \sin^2 \varphi + e \cos^2 \varphi; \\ L &= (a - 2b + c) \sin^2 2\varphi + l \cos^2 2\varphi; \\ P &= \sin 2\varphi[(a - b) \cos^2 \varphi + (b - c) \sin^2 \varphi - 0.5l \cos 2\varphi]; \\ R &= \sin 2\varphi[(a - b) \sin^2 \varphi + (b - c) \cos^2 \varphi + 0.5l \cos 2\varphi]; \\ Q &= (d - e) \sin 2\varphi; \\ K &= m \cos^2 \varphi + n \sin^2 \varphi; \\ M &= 0.5(m - n) \sin 2\varphi; \\ N &= m \sin^2 \varphi + n \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Используя тот факт, что если каждый элемент составного материала устойчив, совокупность материалов (композит) должна быть устойчивой [27] и применив ассоциированный с поверхностью прочности (2.2.3) закон изменения кинематических характеристик, для j -й компоненты композита можно найти:

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{11}^j &= 2\dot{\lambda}_j (A\sigma_{11} + B\sigma_{22} + P\sigma_{12} + D)_j; \\
\dot{\varepsilon}_{22}^j &= 2\dot{\lambda}_j (B\sigma_{11} + C\sigma_{22} + R\sigma_{12} + E)_j; \\
\dot{\varepsilon}_{12}^j &= 2\dot{\lambda}_j (P\sigma_{11} + R\sigma_{22} + L\sigma_{12} + Q)_j; \\
\dot{\varepsilon}_{31}^j &= 2\dot{\lambda}_j (K\sigma_{31} + M\sigma_{32})_j; \\
\dot{\varepsilon}_{32}^j &= 2\dot{\lambda}_j (M\sigma_{31} + N\sigma_{32})_j.
\end{aligned}$$

Решая эту систему, можно найти напряжения в j -й компоненте композита:

$$\begin{aligned}
\sigma_i^j &= \left(\frac{1}{2\dot{\lambda}_j} \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} \dot{\varepsilon}_k - \Delta_i \right)_j / \Delta_j; \quad i = \overline{1,3}; \\
\sigma_{31}^j &= (N\dot{\varepsilon}_{31} - M\dot{\varepsilon}_{32})_j / 2\dot{\lambda}_j \theta_j; \\
\sigma_{32}^j &= (K\dot{\varepsilon}_{32} - M\dot{\varepsilon}_{31})_j / 2\dot{\lambda}_j \theta_j.
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Здесь $\sigma_\alpha \equiv \sigma_{\alpha\alpha}$; $\dot{\varepsilon}_\alpha \equiv \dot{\varepsilon}_{\alpha\alpha}$ ($\alpha=1,2$); $\sigma_3 \equiv \sigma_{12}$; $\dot{\varepsilon}_3 \equiv \dot{\varepsilon}_{12}$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & P \\ B & C & R \\ P & R & L \end{vmatrix}_j; \quad \theta_j = \begin{vmatrix} K & M \\ M & N \end{vmatrix}_j = K_j N_j - M_j^2;$$

Δ_{ij} – определители, полученные путем замены i -го столбца Δ_j на вектор $\{DEQ\}_j^T$; $\delta_{ik}^j = \delta_{ki}^j$ – алгебраическое дополнение (i, k) -го элемента Δ_j ($i, k = \overline{1,3}$).

Подставляя (2.2.5) в (2.2.3), получаем

$$\dot{\lambda}_j^2 = \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} \dot{\varepsilon}_i \dot{\varepsilon}_k + \frac{\Delta}{\theta} (N\dot{\varepsilon}_{13}^2 - 2M\dot{\varepsilon}_{13}\dot{\varepsilon}_{23} + K\dot{\varepsilon}_{23}^2) \right]_j / (4S_\Delta^j), \tag{2.2.6}$$

где

$$S_\Delta^j = (D\Delta_1 + E\Delta_2 + Q\Delta_3 + \Delta)_j.$$

В разложениях функций по нормали к поверхности приведения S_0 для скоростей сдвигов $\dot{\varepsilon}_{\alpha 3}^j$ в пределах j -го слоя ограничились удержанием членов с нулевой степенью z_j (т.е. скорости поперечных сдвигов в пределах отдельного слоя остаются постоянными), а для $\dot{\varepsilon}_i^j$ в пределах пакета слоев сохранены члены при нулевой и первой степенях координаты z :

$$\dot{\varepsilon}_i = \dot{e}_i + z \dot{\varepsilon}_i; \quad 2\dot{\varepsilon}_{\alpha 3}^j = \dot{\gamma}_{\alpha j}; \quad \alpha = \overline{1,2}. \tag{2.2.7}$$

Если справедливы соотношения (2.2.7), то (2.2.6) можно записать в следующем виде:

$$\dot{\lambda}_j^2 = (P_e^j + 2zP_{e\kappa}^j + z^2P_{\kappa\kappa}^j)/(4S_{\Delta}^j). \quad (2.2.8)$$

Здесь $P_e^j, P_{\kappa}^j, P_{e\kappa}^j$ – квадратичные и билинейные формы:

$$\begin{aligned} P_e^j &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} \dot{e}_i \dot{e}_k + (\Delta_j / \theta_j) (N_j \dot{\gamma}_{1j}^2 - 2M_j \dot{\gamma}_{1j} \dot{\gamma}_{2j} + K_j \dot{\gamma}_{2j}^2) / 4; \\ P_{\kappa}^j &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} \ddot{x}_i \ddot{x}_k; \quad P_{e\kappa}^j = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} \dot{e}_i \ddot{x}_k. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Здесь $\dot{e}_{\alpha} \equiv \dot{e}_{\alpha\alpha}$; $\ddot{x}_{\alpha} \equiv \ddot{x}_{\alpha\alpha}$ ($\alpha = \overline{1,2}$); $\dot{e}_3 \equiv \dot{e}_{12}$; $\ddot{x}_3 \equiv \ddot{x}_{12}$.

Погонные внутренние силы и моменты, приведенные к поверхности S_0 , определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \sum_{j=1}^n \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \sigma_{\alpha\beta}^j dz; \quad Q_{\alpha 3} = \sum_{j=1}^n \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \sigma_{\alpha 3}^j dz; \\ M_{\alpha\beta} &= \sum_{j=1}^n \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \sigma_{\alpha\beta}^j z dz; \quad \alpha, \beta = \overline{1,2}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Здесь n – число слоев; $z_{1j} < z_{2j}$ – координаты точек, лежащих на ограничивающих поверхностях j -го слоя. Подставляя σ_{ik}^j в (2.2.10) согласно (2.2.5), получаем:

$$\begin{aligned} T_i &= \sum_{j=1}^n \left[0.5 \sum_{k=1}^3 \delta_{ik}^j (I_{1j} \dot{e}_k + I_{2j} \ddot{x}_k) - \Delta_{ij} h_j \right] / \Delta_j; \\ M_i &= \sum_{j=1}^n \left[0.5 \sum_{k=1}^3 \delta_{ik}^j (I_{2j} \dot{e}_k + I_{3j} \ddot{x}_k) - \Delta_{ij} h_j z_j \right] / \Delta_j; \quad i = \overline{1,3}; \\ Q_{31} &= 0.25 \sum_{j=1}^n (N_j \dot{\gamma}_{1j} - M_j \dot{\gamma}_{2j}) I_{1j} / \theta_j; \\ Q_{32} &= 0.25 \sum_{j=1}^n (K_j \dot{\gamma}_{2j} - M_j \dot{\gamma}_{1j}) I_{1j} / \theta_j. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Здесь $T_{\alpha} \equiv T_{\alpha\alpha}$; $M_{\alpha} \equiv M_{\alpha\alpha}$ ($\alpha = \overline{1,2}$); $T_3 \equiv T_{12}$; $M_3 \equiv M_{12}$; h_j – толщина j -го слоя; z_j – координата срединной поверхности j -го слоя (в системе $\xi_1 \xi_2 z$). Интегралы I_{ij} вычисляются согласно выражению

$$I_{ij} = \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \frac{z^{i-1}}{\lambda_j} dz; \quad i = \overline{1,3}. \quad (2.2.12)$$

Соотношения (2.2.11) являются параметрическими уравнениями предельной

поверхности для тонких многослойных композитных оболочек и пластин при их кратковременном статическом нагружении.

2.3. Определение сечения гиперповерхности плоскостью. Алгоритм А1

Не всегда есть необходимость в использовании всей предельной поверхности. Иногда достаточно иметь дело с тем или иным сечением этой гиперповерхности, т.е. вместо восьмимерного пространства обобщенных сил $T_1, T_2, T_3, M_1, M_2, M_3, Q_{31}, Q_{32}$ в этих случаях можно работать в пространствах меньшей размерности. В отличие от случая, когда предельная поверхность задана единым уравнением в пространстве обобщенных сил, построение сечений поверхности (2.2.11) оказывается достаточно сложной самостоятельной задачей. Пусть, например, необходимо построить линию пересечения предельной поверхности (2.2.11) координатной плоскостью T_1OT_2 . Для этой цели можно использовать следующий алгоритм (алгоритм А1).

1. Задать последовательность значений $\dot{e}_1^{(l)}, \dot{e}_2^{(l)}$ ($l=1, 2, \dots$) из области их допустимых значений.
2. Решить систему из шести нелинейных уравнений
$$T_3 = 0, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = 0, \quad Q_{31} = 0, \quad Q_{32} = 0, \quad (2.3.1)$$
из (2.3.1) определить $\dot{e}_3^{(l)}, \mathfrak{x}_1^{(l)}, \mathfrak{x}_2^{(l)}, \mathfrak{x}_3^{(l)}, \dot{\gamma}_1^{(l)}, \dot{\gamma}_2^{(l)}$. Левые части уравнений (2.3.1) определяются формулами (2.2.11).
3. По известным значениям $\dot{e}_i^{(l)}, \mathfrak{x}_i^{(l)}$, ($i = \overline{1,3}$), $\dot{\gamma}_1^{(l)}, \dot{\gamma}_2^{(l)}$, используя (2.2.11) определить $T_i^{(l)}, M_i^{(l)}, Q_{31}^{(l)}, Q_{32}^{(l)}$. Точка, координаты которой равны этим значениям внутренних сил и моментов, лежит одновременно на поверхности (2.2.11) и на плоскости T_1OT_2 , т.е. принадлежит искомому сечению.
4. Повторяя эту процедуру для различных комбинаций \dot{e}_1 и \dot{e}_2 , получим ряд точек, принадлежащих предельной кривой на плоскости T_1OT_2 . Найдя достаточное число таких точек, строим искомую кривую.

Для решения систем нелинейных уравнений, аналогичных (2.3.1), был использован градиентный метод наискорейшего спуска [108]. Если, например, ищем решение системы уравнений (2.3.1), то можно составить следующую целевую функцию:

$$g = t_3^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + q_{31}^2 + q_{32}^2. \quad (2.3.2)$$

Здесь $t_3 = T_3 \cdot k_3$, $m_i = M_i \cdot k_i$, $q_{3\alpha} = Q_{3\alpha} \cdot k_{3\alpha}$, где k – коэффициенты перевода $T_i, M_i, Q_{3\alpha}$ в безразмерные величины, $i = \overline{1,3}$, $\alpha = \overline{1,2}$. Точка минимума функции (2.3.2) доставляет решение системе уравнений (2.3.1).

В зависимости от размерности пространства, где ищется сечение поверхности (2.2.11), система, аналогичная (2.3.1), может содержать от 1 до 7 уравнений. При этом правые части уравнений такой системы могут быть приняты равными некоторым допустимым значениям, которые отличны от нуля. Эти допустимые значения определяются из условия существования искомого сечения поверхности (2.2.11).

В общем случае предельная поверхность (2.2.11) для композиционного материала имеет участки с кривизной, стремящейся к нулю (прямые ребра и плоские грани). На этих участках однозначной зависимости между векторами скоростей обобщенных перемещений и обобщенных сил нет. Это усложняет поиск решений систем уравнений, аналогичных (2.3.1). Сказанное проиллюстрируем на примере двумерной задачи (рис. 2.3.1). Один из возможных способов выхода из создавшегося затруднительного положения заключается в следующем.

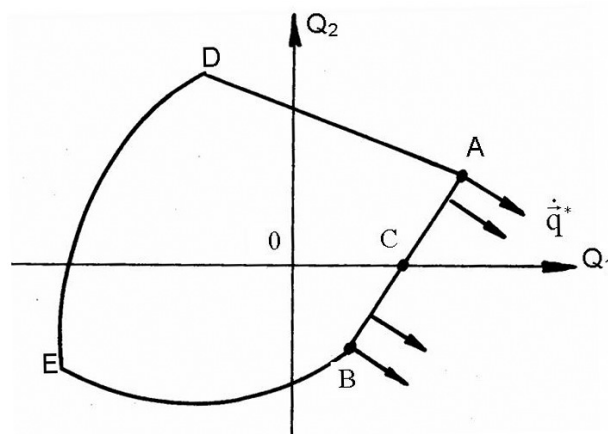


Рис. 2.3.1

Пусть участок АВ (рис. 2.3.1) предельной линии на плоскости обобщенных сил Q_1, Q_2 является отрезком прямой. На этом участке одному и тому же вектору

скоростей обобщенных перемещений \vec{q}^* соответствует бесконечное множество точек прямой АВ, и найти точку С (например), лежащую на пересечении прямой АВ и оси Q_1 , путем варьирования вектора \vec{q} в принципе невозможно. Поэтому, после обнаружения точки А (например), путем минимизации целевой функции g , в ходе дальнейших вычислений на ЭВМ решение начинает ухудшаться (происходит накопление ошибок за счет округлений). По координатам точки $A(Q_1^*, Q_2^*)$ и по значению вектора $\vec{q}^* (\dot{q}_1^*, \dot{q}_2^*)$ являющемуся внешней нормалью к участку АВ предельной линии, найдем уравнение прямой АВ:

$$aQ_1 + bQ_2 = c, \quad aQ_1^* + bQ_2^* = c;$$

отсюда

$$aQ_1 + bQ_2 = aQ_1^* + bQ_2^*. \quad (2.3.3)$$

Согласно закону деформирования, ассоциированного с участком АВ предельной кривой, имеем:

$$\dot{q}_1^* = a\dot{\lambda}, \quad \dot{q}_2^* = b\dot{\lambda},$$

отсюда

$$a = \dot{q}_1^* / \dot{\lambda}; \quad b = \dot{q}_2^* / \dot{\lambda}. \quad (2.3.4)$$

Подстановка (2.3.4) в (2.3.3) дает уравнение прямой АВ:

$$\dot{q}_1^* Q_1 + \dot{q}_2^* Q_2 = \dot{q}_1^* Q_1^* + \dot{q}_2^* Q_2^*. \quad (2.3.5)$$

Точка С определяется как точка пересечения прямой (2.3.5) с прямой $Q_2 = 0$:

$$Q_1(C) = Q_1^* + (\dot{q}_2^* / \dot{q}_1^*) Q_2^*. \quad (2.3.6)$$

Возвращаясь к уравнениям (2.2.11) для случая пересечения плоского участка этой поверхности с плоскостью T_1OT_2 , по аналогии с (2.3.5), получаем:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1^* T_1 + \dot{e}_2^* T_2 = \dot{e}_1^* T_1^* + \dot{e}_2^* T_2^* + \dot{e}_3^* T_3^* + \dot{\alpha}_1^* M_1^* + \dot{\alpha}_2^* M_2^* + \dot{\alpha}_3^* M_3^* \\ + \dot{\gamma}_1^* Q_{31}^* + \dot{\gamma}_2^* Q_{32}^*. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Здесь $\{T_1^*, T_2^*, T_3^*, M_1^*, M_2^*, M_3^*, Q_{31}^*, Q_{32}^*\}^T$ – точка на поверхности (2.2.11), соответствующая вектору скоростей обобщенных перемещений $\{\dot{e}_1^*, \dot{e}_2^*, \dot{e}_3^*, \dot{\alpha}_1^*, \dot{\alpha}_2^*, \dot{\alpha}_3^*, \dot{\gamma}_1^*, \dot{\gamma}_2^*\}$, после достижения которой в процессе минимизации целевой функции (2.3.2) решение начинает ухудшаться (расходится, или очень медленно сходится). По уравнению

(2.3.7) можно построить прямолинейный участок предельной кривой, располагающейся на плоскости T_1OT_2 .

Для построения участка малой кривизны искомого сечения гиперповерхности прочности, можно, например, поступить следующим образом:

1. Согласно уравнению (2.3.7) построить прямую линию.
2. Некоторым компонентам вектора скоростей обобщенных перемещений дать малые приращения (например, $\dot{e}_1^* + \Delta\dot{e}_1$, $\dot{e}_2^* + \Delta\dot{e}_2$). По вышеизложенной методике, согласно (2.3.7) построить новую прямую (если процесс решения опять медленно сходится).
3. Найти точку пересечения двух прямых, построенных согласно пунктам 1 и 2. Эту точку принять за одну из точек искомой предельной кривой, лежащей на пересечении гиперповерхности прочности с заданной гиперплоскостью.
4. Так, малыми шагами, пройти участок малой кривизны предельной поверхности.

Отметим, что при первоначальной минимизации целевой функции (2.3.1) были получены результаты, удовлетворяющее точности построения сечения гиперповерхности прочности лишь частично. Поэтому нами при построении сечения гиперповерхности (2.2.11) плоскостью, применен оригинальный метод варьирования первоначального вектора приближения (п. 1 алгоритма), который позволил уточнить сечение гиперповерхности прочности (уменьшилось значение целевой функции). Варьирование происходит следующим образом.

1. Сначала задаем первое приближение значений $\dot{e}_1^{(l)}$, $\dot{e}_2^{(l)}$.
2. Запоминаем значение целевой функции.
3. Затем промежуток значений $\dot{e}_1^{(l)}$, $\dot{e}_2^{(l)}$ до следующего шага разбиваем на некоторое число участков.
4. На каждом промежуточном значении $\dot{e}_1^{(l)}$, $\dot{e}_2^{(l)}$ выполняем весь алгоритм, запоминая значения целевой функции.
5. После чего выбираем вариант с наименьшим значением g .

Для еще более точного решения можно применить следующий алгоритм, основанный на приведенном методе определения пересечения с координатной осью прямого участка сечения гиперповерхности прочности плоскостью. Предлагается воспользоваться этим алгоритмом после алгоритма варьирования первоначального вектора приближения. Пусть i – шаг, на котором достигнуто наименьшее значение g предыдущего алгоритма.

1. Вычислить коэффициенты уравнения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, где $-c_1$ и $-c_2$ – правые части уравнения (2.3.7) на i -ом и $(i-1)$ -ом шагах предыдущего алгоритма, а $\dot{e}_1^* = a_1, \dot{e}_2^* = b_1$ на i -ом шаге, $\dot{e}_1^* = a_2, \dot{e}_2^* = b_2$ на $(i-1)$ -ом шаге;
2. Получить пересечение двух прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.
3. Полученные значения x и y принять за искомые значения T_1 и T_2 .

Используя эти два алгоритма при минимизации целевой функции на каждом шаге получения точки, принадлежащей искомому сечению гиперповерхности плоскостью, имеем некоторое уменьшение целевой функции.

3. Метод жестких элементов и обобщенных линий разрушения

3.1. Решение Янаса для цилиндрической оболочки

Используя экспериментально полученные формы разрушения цилиндрических оболочек, в [141] предложен и развит метод обобщенных линий текучести, как обобщение теории линий текучести пластин. Форма разрушения характеризуется жесткими частями, соединяющимися вдоль пластических зон, в этих пластических зонах возникают определенные разрывы скоростей перемещений и их производных. Такие разрывы (удлинений срединной поверхности, а также кривизн) должны быть кинематически допустимыми для предполагаемой формы разрушения. Внутренняя энергия рассеивается только вдоль этих обобщенных шарнирных линий. Для панели оболочки, показанной на рис. 3.1.1, кинематические граничные условия имеют вид

$$\dot{w}|_{\varphi=0} = 0, \dot{v}|_{\varphi=0} = 0, \quad (3.1.1)$$

тогда как край BB может перемещаться в направлении φ .

Для цилиндрической оболочки в [141] получены следующие уравнения для поля скоростей перемещений (соотношения между деформациями и перемещениями при движении жесткого тела):

$$\begin{aligned} \dot{w} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = 0, \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} + R \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \varphi^2} + \dot{w} = 0, \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} = 0, R \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial \varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} + \frac{R}{2} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

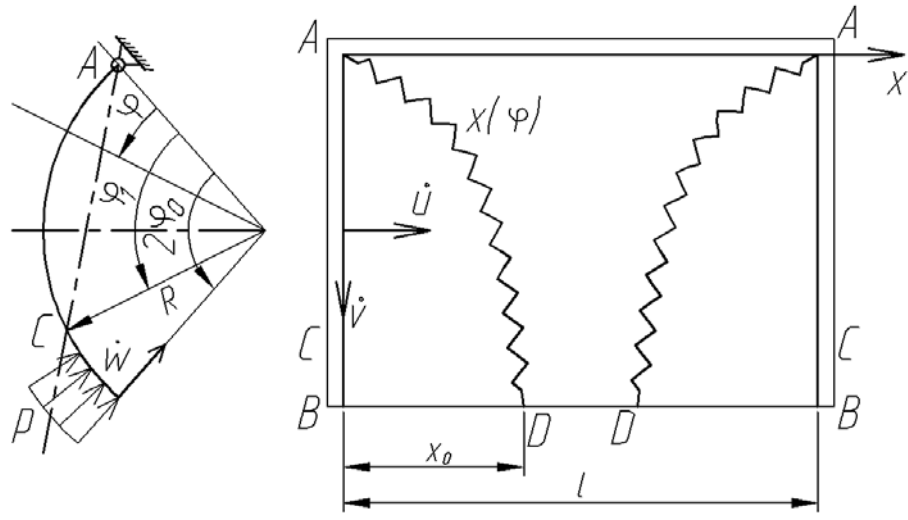


Рис. 3.1.1

Скорости перемещений, удовлетворяющие (3.1.2), имеют вид

$$\dot{u} = -RA \sin \varphi - RB \cos \varphi + E, \quad (3.1.3)$$

$$\dot{v} = (Ax + C) \cos \varphi - (Bx + D) \sin \varphi + F, \quad (3.1.4)$$

$$\dot{w} = (Ax + C) \sin \varphi + (Bx + D) \cos \varphi. \quad (3.1.5)$$

Постоянные интегрирования здесь определяются из соответствующих кинематических граничных условий. В рассматриваемом случае вращения вокруг линии AA имеем следующие граничные условия:

$$\dot{u} = 0, \dot{v} = \frac{\dot{w}_0}{\sin 2\varphi_0} (\cos \varphi - 1), \dot{w} = \frac{\dot{w}_0}{\sin 2\varphi_0} \sin \varphi \quad (3.1.6)$$

которые описывают движение части AADD оболочки. Аналогично этому части ADB вращаются относительно осей, положение которых определено параметром φ_1 (рис. 3.1.1).

Из кинематических условий (3.1.1) и граничных условий

$$\dot{v}|_{x=0} = 0, \dot{u}|_{\varphi=0} = 0, \dot{u}|_{\varphi=\varphi_1} = 0, \dot{w}|_{x=x_0} = \dot{w}_0 \quad (3.1.7)$$

получается поле перемещений

$$\dot{u} = -\frac{R\dot{w}_0}{x_0} k \sin \varphi \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right), \quad (3.1.8)$$

$$\dot{v} = \frac{x}{x_0} \dot{w}_0 k \cos \varphi \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right), \quad (3.1.9)$$

$$\dot{w} = \frac{x}{x_0} \dot{w}_0 k \sin \varphi \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right), \quad (3.1.10)$$

где $k = [\operatorname{tg}(\varphi_1/2) \sin 2\varphi_0 + \cos 2\varphi_0]^{-1}$.

Поскольку скорость радиального перемещения \dot{w} должна быть непрерывна, из (3.1.5) и (3.1.10) получаем уравнение обобщенной шарнирной линии

$$\frac{x}{x_0} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} + \operatorname{ctg} 2\varphi_0}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} + \operatorname{ctg} \varphi}. \quad (3.1.11)$$

Вдоль этой линии возникают разрывы удлинений и кривизн срединной поверхности оболочки. Сосредоточенные скорости удлинения (т. е. скачки скоростей перемещений, обозначаемые через \dot{v} и \dot{u}), которые возникают при переходе через обобщенные шарнирные линии) получаются путем вычитания соответствующих уравнений (3.1.6) и (3.1.8) или (3.1.9). Аналогично этому разрывы наклонов определяются углами вращения $\dot{\theta}_x$ и $\dot{\theta}_\varphi$. Следовательно, чтобы вычислить диссипацию внутренней энергии, необходимо проинтегрировать удельную плотность диссипации, отнесенную к единице длины,

$$R = N_x \dot{u} + N_\varphi \dot{v} + M_x \dot{\theta}_x + M_\varphi \dot{\theta}_\varphi \quad (3.1.12)$$

вдоль линий разрыва (3.1.11).

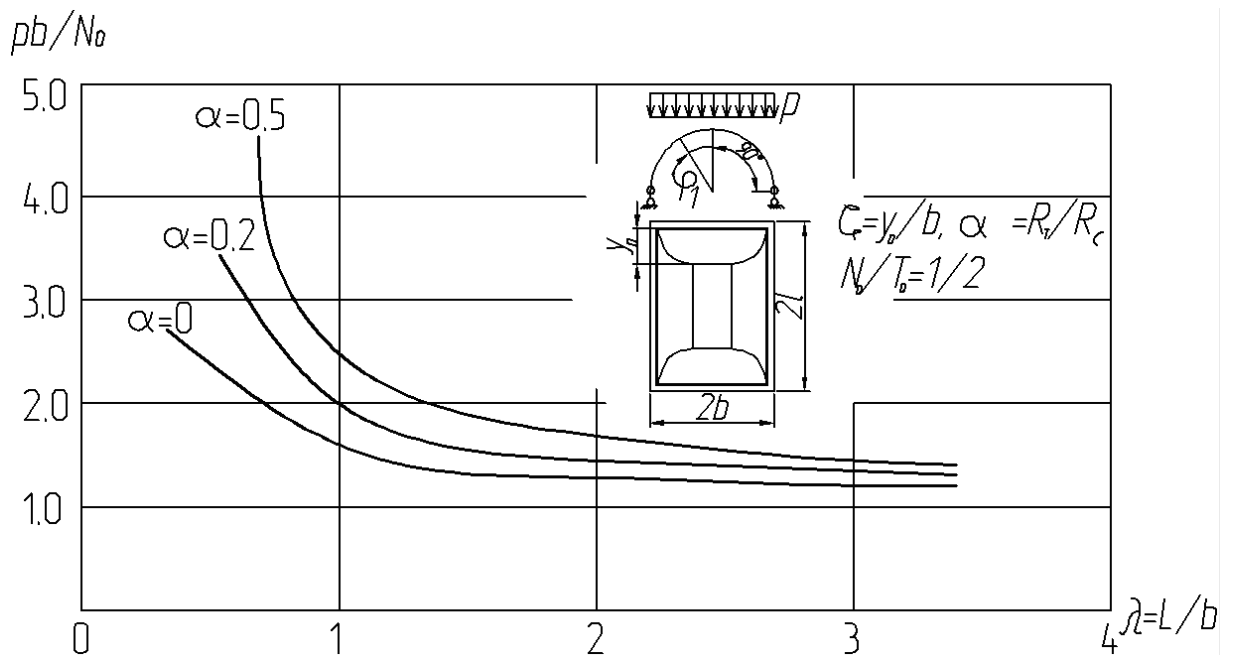


Рис. 3.1.2

Следует упомянуть, что в наиболее общем случае, когда ось вращения не лежит в одной плоскости, появляются сосредоточенные крутильные и сдвиговые деформации, [131]. Описанный подход развит Янасом [131, 132] и применен им для определения разрушающей нагрузки короткой цилиндрической оболочки, шарнирно закрепленной по краям вдоль прочных балок и подкрепленной изгибаемыми диафрагмами. При действии нагрузки, равномерно распределенной по вертикальной площади проекции, разрушающее значение этой нагрузки в частном случае полукруглой оболочки равно

$$\mu = \frac{2N_0}{b} \frac{\lambda + \frac{\alpha}{\zeta} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{T_0}{N_0} \left(\frac{\pi}{2} + 1 - \varphi_1 \right) - \frac{\zeta}{2}}{\lambda(1 + \sin^2 \varphi_1) - \zeta \sin^2 \varphi_1}, \quad (3.1.13)$$

где $\lambda = L/b$; ζ и φ_1 – параметры механизма разрушения, показанные на рис. 3.1.2. Коэффициент α в (3.1.13) обозначает отношение предела текучести материала при растяжении R_t к пределу текучести при сжатии R_c ; N_0 – усилие текучести при чистом сжатии, которое может быть воспринято единицей площади поперечного сечения; T_0 – усилие текучести при чистом сдвиге. Выражение (3.1.13) минимизируется по независимым параметрам механизма разрушения. Результирующая разрушающая нагрузка приведена на рис. 3.1.2 в зависимости от отношения размеров оболочки.

3.2. Оригинальный вариант кинематического метода теории предельного равновесия («метод жестких элементов и обобщенных линий разрушения»)

Эксперименты показывают [63], что во многих случаях разрушение оболочек идет по определенным линиям, области между которыми не разрушаются и не претерпевают пластических деформаций. Традиционные методы дискретизации (например, метод конечных элементов) очень неудобны для описания таких деформаций оболочки, когда некоторые её части перемещаются как жесткие элементы [20]. Ниже развивается метод жестких элементов и обобщенных линий разрушения

(МЖЭиОЛР), позволяющий преодолеть эту трудность. Он обобщает метод пластических шарниров, предложенный в работах [77], [86], [132].

Пусть тонкая оболочка нагружена внешними силами $p_i = \mu p_i^0 + p_i^1$, где p_i^0, p_i^1 являются функциями только пространственных координат, μ – монотонно возрастающий параметр; способ закрепления оболочки исключает возможность ее перемещений и поворотов как целиком жесткого тела. Необходимо определить предельное значение μ_0 параметра внешнего нагружения, когда оболочка становится механизмом хотя бы с одной степенью свободы.

Если разрушение оболочки происходит вдоль отдельных бесконечно тонких слоев, перпендикулярных поверхности приведения S_0 , а области между ними остаются "жесткими", то уравнение равновесия в форме Лагранжа имеет следующий вид:

$$\sum_{k=1}^m \int_{l_k} N dl = \mu \int_S p_i^0 v_i dS + \int_S p_i^1 v_i dS. \quad (3.2.1)$$

Здесь l_k – длина k -ой линии разрушения; m – число линий разрушения; S – площадь поверхности приведения сил; N – мощность внутренних обобщенных сил, приходящаяся на единицу длины линии разрушения; v_i – компоненты вектора скорости движения точки оболочки, где приложена сила p_i .

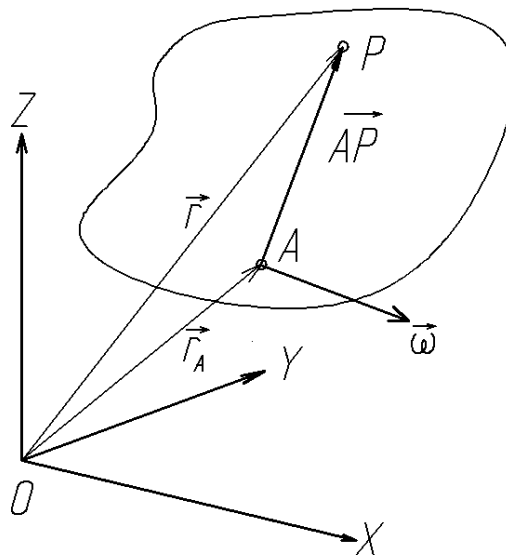


Рис. 3.2.1

Рассмотрим жесткий элемент оболочки, который движется относительно неподвижной системы отсчета OXYZ (рис. 3.2.1). Возьмем произвольную точку A,

неизменно связанную с жестким элементом. Обозначим радиус – вектор точки А через $\vec{r}_A (X_A, Y_A, Z_A)$, радиус – вектор любой точки Р жесткого элемента относительно неподвижной системы – через $\vec{r} (X, Y, Z)$. Согласно теореме Шаля [13], движение жесткого элемента мы можем рассматривать составленным из поступательного движения вместе с полюсом А и движением жесткого элемента около точки А как неподвижной. Поэтому скорость какой-либо точки Р жесткого элемента будет равна сумме двух скоростей: 1) скорости от поступательного движения, равной скорости $\vec{v}_A = d\vec{r}_A/dt$ точки А, и 2) скорости от движения около точки А как неподвижной, которая равна $\vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}$, где $\vec{\omega}$ – мгновенная угловая скорость жесткого элемента. Следовательно,

$$\vec{v}_p = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}. \quad (3.2.2)$$

Любое перемещение жесткого элемента может быть осуществлено путем поступательного перемещения и вращения. При этом поступательная часть перемещения зависит от выбора полюса; вращательная же часть перемещения от выбора полюса не зависит.

Определение мощности внешних нагрузок (т.е. правой части уравнения (3.2.1)) можно осуществить с использованием следующей формулы:

$$\dot{A} = \mu \sum_{j=1}^{n_1} (\vec{F}_j^0 \vec{v}_j + \vec{M}_j^0 \vec{\omega}_j) + \sum_{j=1}^{n_2} (\vec{F}_j^1 \vec{v}_j + \vec{M}_j^1 \vec{\omega}_j). \quad (3.2.3)$$

Здесь j – номер жесткого элемента; n_1 – число жестких элементов, на которые действуют нагрузки, зависящие от параметра μ ; n_2 – число жестких элементов, на которые действуют нагрузки, не зависящие от параметра μ ;

$$\vec{F}_j^0 = \sum_{i=1}^{k_1} \vec{F}_i^0 + \sum_{i=1}^{k_2} \int_{l_i} \vec{q}_i^0 dl + \sum_{i=1}^{k_3} \int_{S_i} \vec{p}_i^0 dS \quad (3.2.4)$$

– главный вектор соответствующих сил, действующих на j -й жесткий элемент; k_1 , k_2 , k_3 – числа соответствующих сил, действующих на j -й элемент; аналогично определяются F_j^1 ;

$$\vec{M}_j^0 = \sum_{i=1}^{k_1} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^0) + \sum_{i=1}^{k_2} \int_{l_i} (\vec{r} \times \vec{q}_i^0) dl + \sum_{i=1}^{k_3} \int_{S_i} (\vec{r} \times \vec{p}_i^0) dS \quad (3.2.5)$$

– главный момент соответствующих внешних сил, приложенных к j -му жесткому элементу, относительно полюса B_j этого элемента; аналогично определяются \vec{M}_j^1 ; \vec{F}_i^0, \vec{F}_i^1 – сосредоточенные силы; \vec{q}_i^0, \vec{q}_i^1 – распределенные вдоль линий l_i силы; \vec{p}_i^0, \vec{p}_i^1 – распределенные по площадям S_i силы; \vec{v}_j – скорость поступательного движения полюса B_j j -го жесткого элемента; $\vec{\omega}_j$ – скорость вращения j -го элемента. Радиусы – векторы \vec{r} в (3.2.5) определены относительно полюса B_j .

Рассмотрим левую часть уравнения (3.2.1). На рис. 3.2.2 изображены два смежных жестких элемента оболочки с полюсами в точках А и В соответственно, и линия разрушения O_1O_2 между этими элементами. Разрывы скоростей поступательных перемещений $\Delta \vec{v}_1$ (в точке O_1), $\Delta \vec{v}_2$ (в точке O_2) и вращений жестких элементов А и В $\Delta \vec{\omega}$ определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v}_1 &= \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{BO}_1 - \vec{v}_A - \vec{\omega}_A \times \vec{AO}_1; \\ \Delta \vec{v}_2 &= \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{BO}_2 - \vec{v}_A - \vec{\omega}_A \times \vec{AO}_2; \\ \Delta \vec{\omega} &= \vec{\omega}_B - \vec{\omega}_A. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

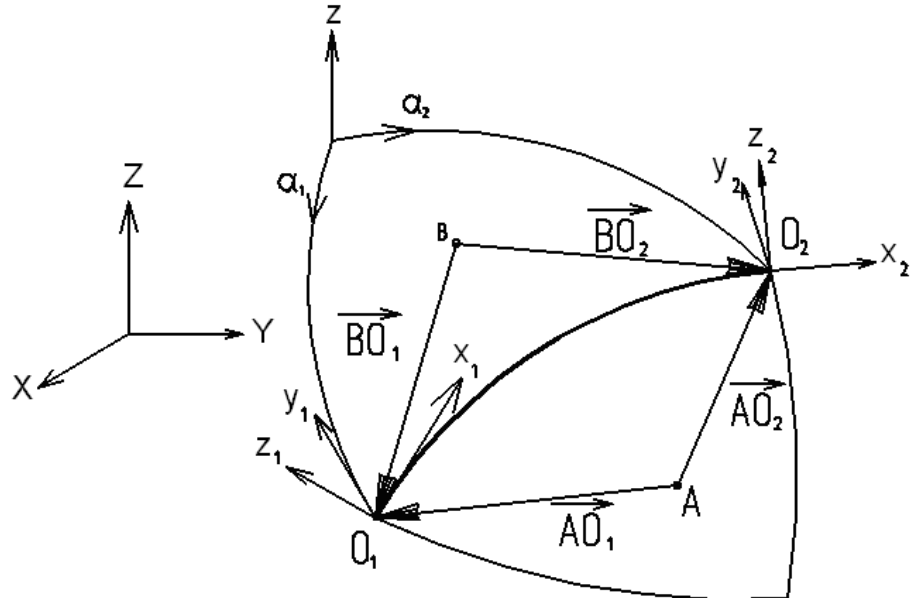


Рис. 3.2.2

Обозначим через \vec{R}_1 и \vec{M}_1 главный вектор и главный момент внутренних погонных обобщенных сил в точке O_1 линии разрушения, полученные после их приведения в точку O_1 , через \vec{R}_2 и \vec{M}_2 – аналогичные величины в точке O_2 . Тогда мощности погонных внутренних сил и моментов в точках O_1 и O_2 линии разрушения O_1O_2 (рис. 3.2.2), развиваемые ими на разрывах скоростей соответствующих перемещений и поворотов (3.2.6), определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} N_1 &= \vec{R}_1 \cdot \Delta \vec{v}_1 + \vec{M}_1 \cdot \Delta \vec{\omega}; \\ N_2 &= \vec{R}_2 \cdot \Delta \vec{v}_2 + \vec{M}_2 \cdot \Delta \vec{\omega}. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Между точками O_1 и O_2 линии разрушения O_1O_2 (рис. 3.2.2) примем линейную аппроксимацию функции N . Тогда левую часть уравнения (3.2.1) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^m \int_{l_k} N dl = \sum_{k=1}^m 0.5(N_{1k} + N_{2k}) l_k. \quad (3.2.8)$$

Полагаем, что в предельном состоянии материал устойчив (справедлив постулат Друккера), а вектор скоростей обобщенных перемещений $\{\Delta \vec{v}, \Delta \vec{\omega}\}^T$ направлен по внешней нормали к поверхности прочности в пространстве переменных \vec{R} и \vec{M} (справедлив ассоциированный закон деформирования). Предельную поверхность аппроксимируем выпуклым многогранником, i -ая вершина которого определяется вектором $\{\vec{R}_i^*, \vec{M}_i^*\}^T$, $i = \overline{1, k}$, k – число вершин аппроксимирующего многогранника. Тогда равенства (3.2.7) могут быть аппроксимированы следующей системой неравенств:

$$\begin{aligned} N_1 &\geq \vec{R}_{1i}^* \Delta \vec{v}_1 + \vec{M}_{1i}^* \Delta \vec{\omega}, \quad i = \overline{1, k_4}; \\ N_2 &\geq \vec{R}_{2i}^* \Delta \vec{v}_2 + \vec{M}_{2i}^* \Delta \vec{\omega}, \quad i = \overline{1, k_5}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Здесь k_4, k_5 – числа вершин соответствующих предельных многогранников. В общем случае разным точкам линии разрушения могут соответствовать как различные поверхности прочности, так и различные их аппроксимации.

Теперь задачу можно сформулировать в виде задачи линейного программирования:

найти $\min \mu^+$, где

$$\mu^+ = 0.5 \sum_{k=1}^m (N_{1k} + N_{2k}) l_k - \sum_{j=1}^{n_2} (\vec{F}_j^1 \vec{v}_j + \vec{M}_j^1 \vec{\omega}_j), \quad (3.2.10)$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n_1} (\vec{F}_j^0 \vec{v}_j + \vec{M}_j^0 \vec{\omega}_j) = 1 \quad (3.2.11)$$

и при соблюдении ограничений вида (3.2.9). Как будет показано ниже, аналогичными неравенствами могут быть учтены и условия опирания оболочки.

Несвободными переменными задачи линейного программирования являются значения мощности диссипации внутренней энергии $N_{1k} \geq 0$, $N_{2k} \geq 0$ в начале и конце k -ой линии разрушения соответственно ($k = \overline{1, m}$), а свободными (знакопеременными) переменными задачи – скорости поступательного перемещения \vec{v}_j полюса j -го жесткого элемента и поворота $\vec{\omega}_j$ этого же элемента, $j = \overline{1, n_3}$, n_3 – число всех жестких элементов.

Итак, используемый здесь метод жестких элементов и сосредоточенных линий разрушения между этими элементами является разновидностью кинематического метода теории предельного равновесия. Для определения $\inf \mu^+$ необходимо решить ряд задач линейного программирования, уточняя разбиение оболочки на возможные жесткие элементы и, соответственно, формы линий разрушения между ними.

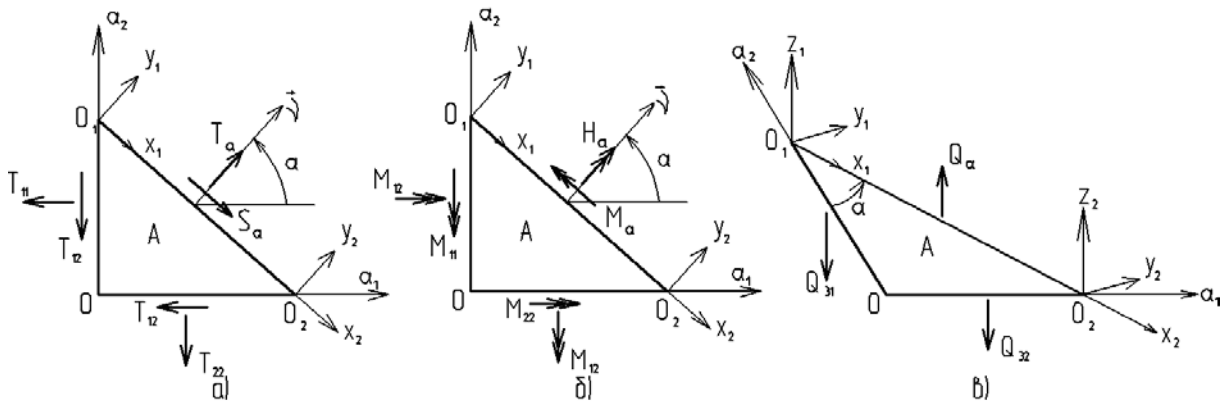


Рис. 3.2.3

Перейдем к координатной форме записи основных соотношений (3.2.9), (3.2.10) и (3.2.11). На рис. 3.2.3 изображен бесконечно малый элемент поверхности приведения S_0 оболочки (пластинки) и указаны действующие на него погонные

внутренние силы и моменты. Наклонная линия O_1O_2 является элементом линии разрушения. Направление линии O_1O_2 определяется углом α между направлением линии главной кривизны α_1 поверхности S_0 и направлением внешней нормали \vec{v} к жесткому элементу А. Условия равновесия элемента, изображенного на рис. 3.2.3:

$$\begin{aligned} T_\alpha &= T_{11} \cos^2 \alpha + T_{22} \sin^2 \alpha + T_{12} \sin 2\alpha; \\ S_\alpha &= 0.5(T_{11} - T_{22}) \sin 2\alpha - T_{12} \cos 2\alpha; \\ M_\alpha &= M_{11} \cos^2 \alpha + M_{22} \sin^2 \alpha + M_{12} \sin 2\alpha; \\ H_\alpha &= 0.5(M_{11} - M_{22}) \sin 2\alpha - M_{12} \cos 2\alpha; \\ Q_\alpha &= Q_{31} \cos \alpha + Q_{32} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Теперь неравенства (3.2.9) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} N_1 &\geq S_{\alpha i}^* \Delta v_{11} + T_{\alpha i}^* \Delta v_{12} + Q_{\alpha i}^* \Delta v_{13} - M_{\alpha i}^* \Delta \omega_{11} + H_{\alpha i}^* \Delta \omega_{12}, i = \overline{1, k_4}; \\ N_2 &\geq S_{\alpha i}^* \Delta v_{21} + T_{\alpha i}^* \Delta v_{22} + Q_{\alpha i}^* \Delta v_{23} - M_{\alpha i}^* \Delta \omega_{21} + H_{\alpha i}^* \Delta \omega_{22}, i = \overline{1, k_5}. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Здесь Δv_{11} – проекция $\Delta \vec{v}_1$ на ось x_1 (рис. 3.2.3), соответствует деформации сдвига в точке O_1 , Δv_{12} – проекция $\Delta \vec{v}_1$ на ось y_1 , соответствует деформации растяжения – сжатия в точке O_1 , ..., $\Delta \omega_{22}$ – проекция $\Delta \vec{\omega}$ на ось y_2 , соответствует деформации кручения в точке O_2 . Оси $x_1 y_1 z_1$ – сопровождающий трехгранник линии разрушения O_1O_2 в точке O_1 , а оси $x_2 y_2 z_2$ – то же, в точке O_2 .

Выразим в (3.2.13) $\Delta v_{11}, \Delta v_{12}, \dots, \Delta \omega_{22}$ через проекции векторов $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{\omega}_A, \vec{\omega}_B$ (соответственно скорости поступательных перемещений полюсов и поворотов жестких элементов А и В, между которыми проходит линия разрушения O_1O_2) на глобальные оси X, Y, Z . Пусть \vec{e}_{11} – орт оси x_1 , \vec{e}_{12} – оси y_1 , \vec{e}_{13} – оси z_1 , \vec{e}_{21} – оси x_2 , \vec{e}_{22} – оси y_2 , \vec{e}_{23} – оси z_2 . Проекции векторов $\vec{e}_{11}, \dots, \vec{e}_{23}$ на оси X, Y, Z обозначим $t_{11}^1, \dots, t_{33}^2$ соответственно (таблица 3.2.1). Здесь, например, $\vec{e}_{11} = t_{11}^1 \vec{i} + t_{21}^1 \vec{j} + t_{31}^1 \vec{k}$, $\vec{e}_{12} = t_{12}^1 \vec{i} + t_{22}^1 \vec{j} + t_{32}^1 \vec{k}$, и т.д.

Таблица 3.2.1

		\vec{e}_{11}	\vec{e}_{12}	\vec{e}_{13}	\vec{e}_{21}	\vec{e}_{22}	\vec{e}_{23}
\vec{i}	X	t_{11}^1	t_{12}^1	t_{13}^1	t_{11}^2	t_{12}^2	t_{13}^2

\vec{j}	Y	t_{21}^1	t_{22}^1	t_{23}^1	t_{21}^2	t_{22}^2	t_{23}^2
\vec{k}	Z	t_{31}^1	t_{32}^1	t_{33}^1	t_{31}^2	t_{32}^2	t_{33}^2

Теперь можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\Delta v_{ij} &= t_{1j}^i \Delta v_{iX} + t_{2j}^i \Delta v_{iY} + t_{3j}^i \Delta v_{iZ}; \\ \Delta \omega_{ij} &= t_{1j}^i \Delta \omega_X + t_{2j}^i \Delta \omega_Y + t_{3j}^i \Delta \omega_Z; \quad i = \overline{1,2}; \quad j = \overline{1,3}.\end{aligned}\quad (3.2.14)$$

Здесь $\Delta v_{iX}, \dots, \Delta \omega_Z$ – проекции векторов $\Delta \vec{v}_1, \Delta \vec{v}_2, \Delta \vec{\omega}$ на глобальные оси X, Y, Z; например:

$$\begin{aligned}\Delta v_{iX} &= v_{BX} + [\omega_{BY}(Z_{0i} - Z_B) - \omega_{BZ}(Y_{0i} - Y_B)] - \\ &\quad - v_{AX} - [\omega_{AY}(Z_{0i} - Z_A) - \omega_{AZ}(Y_{0i} - Y_A)]; \quad i = \overline{1,2}; \\ \Delta \omega_X &= \omega_{BX} - \omega_{AX}.\end{aligned}\quad (3.2.15)$$

Выражения для $\Delta v_{iY}, \Delta \omega_Y, \Delta v_{iZ}, \Delta \omega_Z$ получаются путем круговой замены индексов и переменных в (3.2.15): X на Y, Y на Z, Z на X.

Подставляя (3.2.15) и аналогичные выражения для $\Delta v_{iY}, \Delta \omega_Y, \Delta v_{iZ}, \Delta \omega_Z$ в (3.2.14), получаем:

$$\begin{aligned}\Delta v_{ij} &= t_{1j}^i v_{BX} + t_{2j}^i v_{BY} + t_{3j}^i v_{BZ} + k_{BX}^{ij} \omega_{BX} + k_{BY}^{ij} \omega_{BY} + k_{BZ}^{ij} \omega_{BZ} - \\ &\quad - t_{1j}^i v_{AX} - t_{2j}^i v_{AY} - t_{3j}^i v_{AZ} - k_{AX}^{ij} \omega_{AX} - k_{AY}^{ij} \omega_{AY} - k_{AZ}^{ij} \omega_{AZ}; \\ \Delta \omega_{ij} &= t_{1j}^i \omega_{BX} + t_{2j}^i \omega_{BY} + t_{3j}^i \omega_{BZ} - t_{1j}^i \omega_{AX} - t_{2j}^i \omega_{AY} - t_{3j}^i \omega_{AZ}.\end{aligned}\quad (3.2.16)$$

Здесь $k_{BX}^{ij} = t_{3j}^i \Delta Y_{iB} - t_{2j}^i \Delta Z_{iB}$; k_{BY}^{ij}, k_{BZ}^{ij} соответственно получаются путем круговой замены X на Y, Y на Z, Z на X, индексов 3 на 1, 2 на 3, 1 на 2 в этом выражении;

например, $k_{BZ}^{ij} = t_{2j}^i \Delta X_{iB} - t_{1j}^i \Delta Y_{iB}$; $k_{AX}^{ij}, k_{AY}^{ij}, k_{AZ}^{ij}$ получаются путем замены индекса

B на индекс A в соответствующих выражениях для $k_{BX}^{ij}, \dots, k_{BZ}^{ij}$; например,

$$k_{AX}^{ij} = t_{3j}^i \Delta Y_{iA} - t_{2j}^i \Delta Z_{iA}; \quad \Delta X_{iA} = X_{0i} - X_A; \quad \dots; \quad \Delta Z_{iB} = Z_{0i} - Z_B; \quad i = \overline{1,2}; \quad j = \overline{1,3}.$$

Подставляя (3.2.16) в (3.2.13), получаем:

$$\begin{aligned}
N_1 \geq & -a_{1i}^1 v_{AX} - a_{2i}^1 v_{AY} - a_{3i}^1 v_{AZ} - a_{4i}^{1A} \omega_{AX} - a_{5i}^{1A} \omega_{AY} - \\
& - a_{6i}^{1A} \omega_{AZ} + a_{1i}^1 v_{BX} + a_{2i}^1 v_{BY} + a_{3i}^1 v_{BZ} + a_{4i}^{1B} \omega_{BX} + \\
& + a_{5i}^{1B} \omega_{BY} + a_{6i}^{1B} \omega_{BZ}; \quad i = \overline{1, k_4}; \\
N_2 \geq & -a_{1i}^2 v_{AX} - a_{2i}^2 v_{AY} - a_{3i}^2 v_{AZ} - a_{4i}^{2A} \omega_{AX} - a_{5i}^{2A} \omega_{AY} - \\
& - a_{6i}^{2A} \omega_{AZ} + a_{1i}^2 v_{BX} + a_{2i}^2 v_{BY} + a_{3i}^2 v_{BZ} + a_{4i}^{2B} \omega_{BX} + \\
& + a_{5i}^{2B} \omega_{BY} + a_{6i}^{2B} \omega_{BZ}; \quad i = \overline{1, k_5}.
\end{aligned}$$

(3.2.17)

Здесь

$$\begin{aligned}
a_{ji}^l &= (S_{\alpha i}^*)^l t_{j1}^l + (T_{\alpha i}^*)^l t_{j2}^l + (Q_{\alpha i}^*)^l t_{j3}^l; \quad j = \overline{1, 3}; \\
a_{4i}^{lA} &= (S_{\alpha i}^*)^l k_{AX}^{l1} + (T_{\alpha i}^*)^l k_{AX}^{l2} + (Q_{\alpha i}^*)^l k_{AX}^{l3} - (M_{\alpha i}^*)^l t_{11}^l + (H_{\alpha i}^*)^l t_{12}^l; \\
a_{5i}^{lA} &= (S_{\alpha i}^*)^l k_{AY}^{l1} + (T_{\alpha i}^*)^l k_{AY}^{l2} + (Q_{\alpha i}^*)^l k_{AY}^{l3} - (M_{\alpha i}^*)^l t_{21}^l + (H_{\alpha i}^*)^l t_{22}^l; \\
a_{6i}^{lA} &= (S_{\alpha i}^*)^l k_{AZ}^{l1} + (T_{\alpha i}^*)^l k_{AZ}^{l2} + (Q_{\alpha i}^*)^l k_{AZ}^{l3} - (M_{\alpha i}^*)^l t_{31}^l + (H_{\alpha i}^*)^l t_{32}^l; \\
l &= \overline{1, 2}.
\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Выражения для $a_{4i}^{lB}, a_{5i}^{lB}, a_{6i}^{lB}$ получаются соответственно из формул для $a_{4i}^{lA}, a_{5i}^{lA}, a_{6i}^{lA}$ заменой индекса А на индекс В.

Отметим, что в соотношениях (3.2.14), ..., (3.2.18) в обозначениях типа $t_{11}^2, k_{BX}^{ij}, a_{1i}^2, (S_{\alpha i}^*)^l$ и т.п. $2, i, j, l$ и др. являются индексами. Обозначение типа $\vec{\omega}_A$ соответствует скорости вращения жесткого элемента с полюсом в точке А, вокруг полюса А.

Линия разрушения O_1O_2 между жесткими элементами поверхности приведения S_0 оболочки (рис. 3.2.2) в общем случае является пространственной кривой линией. Для того чтобы определить локальные системы координат $O_1x_1y_1z_1, O_2x_2y_2z_2$, необходимо записать уравнение кривой O_1O_2 . Окончательное разбиение оболочки на жесткие элементы и, следовательно, расположение линий разрушения на поверхности S_0 будут определяться путем решения ряда задач линейного программирования с целью определения $\inf \mu^+$ (т.е. в результате численного эксперимента). Рассматривая уравнение (3.2.10), можно сделать вывод, что минимизацию μ^+ можно осуществить и за счет уменьшения суммарной длины линий разрушения

$\sum_{k=1}^m l_k$, т.е. истинный механизм разрушения не будет содержать большого числа дисков. С другой стороны, линия разрушения между точками O_1 и O_2 будет стремиться к геодезической кривой на поверхности S_0 , проходящей через точки O_1 и O_2 . Чтобы записать уравнение геодезической кривой на поверхности $Z = Z(X, Y)$, проходящей через точки O_1 и O_2 , необходимо решить нелинейное дифференциальное уравнение. В общем случае это – сложная математическая задача. Необходимо еще учесть, что линия разрушения O_1O_2 может довольно существенно отклониться от геодезической кривой на поверхности S_0 , проходящей через точки O_1 и O_2 (причинами отклонения могут быть неоднородности материала и напряженно-деформированного состояния, анизотропия свойств материала, конструктивные особенности изделия и т.д.). С учетом сказанного, и приближенного характера решения, можно считать, что предлагаемый нами ниже подход к определению систем координат $O_1x_1y_1z_1$, $O_2x_2y_2z_2$ и линии разрушения O_1O_2 является достаточно алгоритмичным и имеет удовлетворительную точность. Краткое содержание этого подхода заключается в следующем:

1. Восстановим нормали к поверхности приведения S_0 оболочки в точках O_1 и O_2 , направляющими векторами которых являются векторы \vec{e}_{13} и \vec{e}_{23} соответственно.
2. Проведем касательные плоскости к поверхности приведения S_0 оболочки в точках O_1 и O_2 , спроектируем на эти плоскости отрезок прямой O_1O_2 . Соответственно получим прямые с направляющими векторами \vec{e}_{11} и \vec{e}_{21} .
3. Используя правило правого винта, найдем \vec{e}_{12} и \vec{e}_{22} (соответственно направляющие векторы осей y_1 и y_2).
4. Если точное определение длины линии разрушения O_1O_2 затруднительно, то ее можно определить приближенно. Если оболочка достаточно полая, то длину линии разрушения O_1O_2 можно считать приблизительно равной длине отрезка прямой O_1O_2 . Можно построить плос-

кость, содержащую в себе вектор \vec{e}_{13} и прямую O_1O_2 , найти линию пересечения этой плоскости с поверхностью S_0 и длину дуги O_1O_2 этой линии принять за длину линии разрушения. Возможны другие варианты приближенного определения длины линии разрушения O_1O_2 .

Рассмотрим более подробно некоторые из этих пунктов.

Уравнение касательной в точке $O_1(X_1, Y_1, Z_1)$ плоскости к оболочке имеет вид

$$a(X - X_1) + b(Y - Y_1) + c(Z - Z_1) = 0. \quad (3.2.19)$$

Уравнения нормали к поверхности S_0 в точке $O_1(X_1, Y_1, Z_1)$:

$$\frac{X - X_1}{a} = \frac{Y - Y_1}{b} = \frac{Z - Z_1}{c} \quad (3.2.20)$$

(если знаменатель какой-либо из дробей равен нулю, это означает, что равен нулю соответствующий числитель).

Если поверхность приведения S_0 оболочки определена в явной форме, т.е.

$$Z = Z(X, Y),$$

то коэффициенты в (3.2.19), (3.2.20) определяются следующими формулами:

$$a = \frac{\partial Z(X_1, Y_1)}{\partial X}, \quad b = \frac{\partial Z(X_1, Y_1)}{\partial Y}, \quad c = -1. \quad (3.2.21)$$

Если поверхность S_0 задана в векторной форме, т.е. $\vec{r} = \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2)$, где α_1, α_2 – параметры (например, криволинейные координаты на поверхности S_0), то касательная плоскость в точке O_1 определяется уравнением

$$(\vec{r} - \vec{r}_{01}) \vec{e}_{13} = 0, \quad (3.2.22)$$

а нормаль к поверхности S_0 в той же точке O_1 – уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}_{01} + t \vec{e}_{13}, \quad (3.2.23)$$

где t – параметр, \vec{e}_{13} – единичный вектор нормали к поверхности S_0 в точке O_1 .

Аналогично определяются нормаль к поверхности S_0 и касательная плоскость к этой поверхности в заданной точке O_1 в случае задания уравнения поверхности S_0 в другой форме (в неявной или параметрической формах).

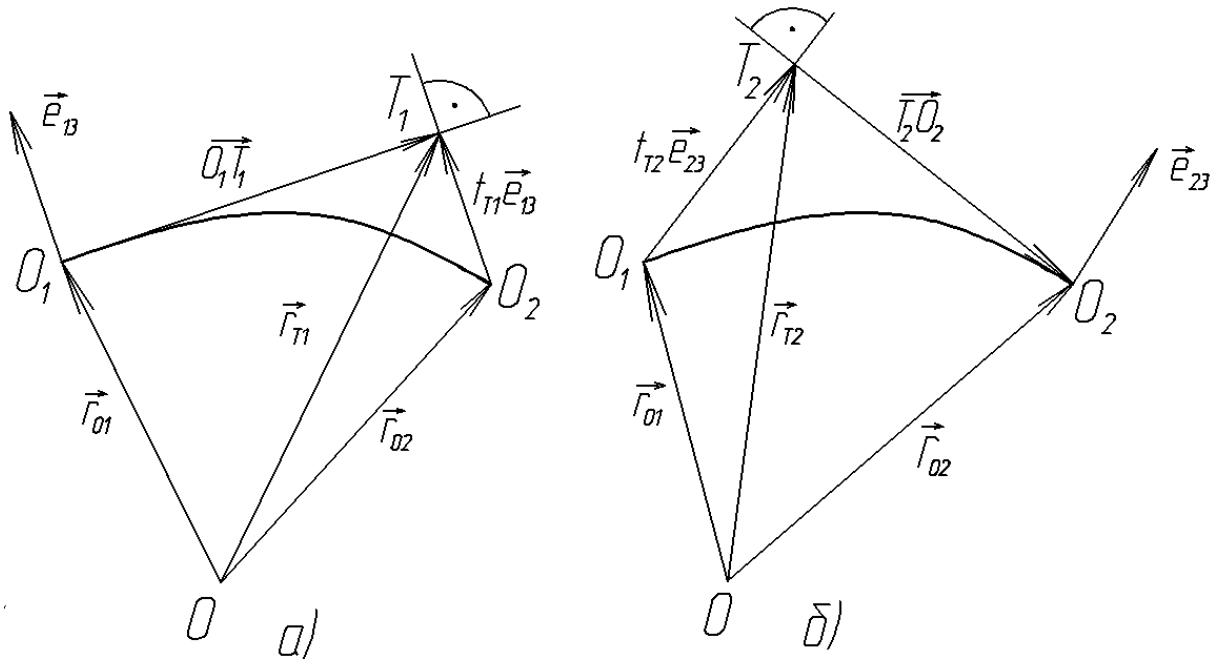


Рис. 3.2.4

Найдем радиус – вектор точки T_1 , которая является точкой пересечения прямой, проведенной через точку O_2 линии разрушения параллельно \vec{e}_{13} , с касательной плоскостью (3.2.22) в точке O_1 (рис. 3.2.4а). Уравнение прямой, проходящей через точку O_2 параллельно \vec{e}_{13} :

$$\vec{r} = \vec{r}_{02} + t\vec{e}_{13}, \quad (3.2.24)$$

Решая совместно (3.2.22) и (3.2.24), определяем параметр t_{T1} для точки T_1 :

$$\begin{aligned} (\vec{r}_{02} + t_{T1}\vec{e}_{13} - \vec{r}_{01})\vec{e}_{13} &= 0, \\ t_{T1} &= \frac{(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02})\vec{e}_{13}}{|\vec{e}_{13}|^2} = (\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02})\vec{e}_{13}. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Подставив (3.2.25) в (3.2.24), находим радиус – вектор точки T_1 :

$$\vec{r}_{T1} = \vec{r}_{02} + t_{T1}\vec{e}_{13}. \quad (3.2.26)$$

Далее находим

$$\overrightarrow{O_1T_1} = \vec{r}_{T1} - \vec{r}_{01}. \quad (3.2.27)$$

Аналогично определяем вектор $\overrightarrow{T_2O_2}$ (рис 3.2.4б). Уравнение касательной плоскости к поверхности S_0 в точке O_2 :

$$(\vec{r} - \vec{r}_{02})\vec{e}_{23} = 0. \quad (3.2.28)$$

Уравнение нормали к поверхности S_0 в точке O_2 :

$$\vec{r} = \vec{r}_{02} + t \vec{e}_{23}. \quad (3.2.29)$$

Уравнение прямой, проходящей через точку O_1 параллельно \vec{e}_{23} :

$$\vec{r} = \vec{r}_{01} + t \vec{e}_{23}. \quad (3.2.30)$$

Решая совместно уравнения (3.2.28) и (3.2.30), находим параметр t_{T2} :

$$\begin{aligned} (\vec{r}_{01} + t_{T2} \vec{e}_{23} - \vec{r}_{02}) \vec{e}_{23} &= 0, \\ t_{T2} &= \frac{(\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}) \vec{e}_{23}}{|\vec{e}_{23}|^2} = (\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}) \vec{e}_{23}. \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

Подставляя (3.2.31) в (3.2.30), находим радиус – вектор точки T_2 :

$$\vec{r}_{T2} = \vec{r}_{01} + t_{T2} \vec{e}_{23}. \quad (3.2.32)$$

Далее находим вектор $\overrightarrow{T_2 O_2}$

$$\overrightarrow{T_2 O_2} = \vec{r}_{02} - \vec{r}_{T2}. \quad (3.2.33)$$

Находим единичные векторы локальных систем координат в точках O_1 и O_2 линии разрушения $O_1 O_2$:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{11} &= \overrightarrow{O_1 T_1} / |\overrightarrow{O_1 T_1}|; \quad \vec{e}_{21} = \overrightarrow{T_2 O_2} / |\overrightarrow{T_2 O_2}|; \\ \vec{e}_{13} &= \overrightarrow{N_1} / |\overrightarrow{N_1}|; \quad \vec{e}_{23} = \overrightarrow{N_2} / |\overrightarrow{N_2}|. \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

Здесь $\vec{N}_1 = \{a_1, b_1, c_1\}^T$, $\vec{N}_2 = \{a_2, b_2, c_2\}^T$ – векторы нормалей к поверхности S_0 в точках O_1 и O_2 соответственно; a_1, b_1, c_1 , например, могут быть определены по формулам (3.2.23). Используя правило правого винта, находим

$$\begin{aligned} \vec{e}_{12} &= \vec{e}_{13} \times \vec{e}_{11}; \\ \vec{e}_{22} &= \vec{e}_{23} \times \vec{e}_{21}. \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

Запишем полученные формулы в координатной форме. В глобальной (неподвижной) системе координат OXYZ имеем:

уравнение поверхности приведения S_0 оболочки

$$F(X, Y, Z) = 0. \quad (3.2.36)$$

Нормаль к этой поверхности в ее точке O_1 имеет следующие компоненты:

$$a_1 = \frac{\partial F(X_1, Y_1, Z_1)}{\partial X}, \quad b_1 = \frac{\partial F(X_1, Y_1, Z_1)}{\partial Y}, \quad c_1 = \frac{\partial F(X_1, Y_1, Z_1)}{\partial Z}. \quad (3.2.37)$$

Длина этой нормали:

$$|\vec{N}_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}. \quad (3.2.38)$$

Проекции единичного вектора \vec{e}_{13} оси O_1Z_1 на оси X, Y, Z соответственно:

$$t_{13}^1 = \frac{a_1}{|\vec{N}_1|}; \quad t_{23}^1 = \frac{b_1}{|\vec{N}_1|}; \quad t_{33}^1 = \frac{c_1}{|\vec{N}_1|}. \quad (3.2.39)$$

Аналогично можно найти

$$t_{13}^2 = \frac{a_2}{|\vec{N}_2|}; \quad t_{23}^2 = \frac{b_2}{|\vec{N}_2|}; \quad t_{33}^2 = \frac{c_2}{|\vec{N}_2|}. \quad (3.2.40)$$

Далее находим

$$\begin{aligned} t_{T1} &= (X_1 - X_2)t_{13}^1 + (Y_1 - Y_2)t_{23}^1 + (Z_1 - Z_2)t_{33}^1; \\ (r_{T1})_X &= X_2 + t_{T1}t_{13}^1; \\ (O_1T_1)_X &= X_2 - X_1 + t_{T1}t_{13}^1. \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

Аналогично можно найти

$$\begin{aligned} (O_1T_1)_Y &= Y_2 - Y_1 + t_{T1}t_{23}^1; \\ (O_1T_1)_Z &= Z_2 - Z_1 + t_{T1}t_{33}^1. \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

Далее находим

$$\begin{aligned} |\vec{O_1T_1}| &= \sqrt{(O_1T_1)_X^2 + (O_1T_1)_Y^2 + (O_1T_1)_Z^2}; \\ t_{11}^1 &= \frac{(O_1T_1)_X}{|\vec{O_1T_1}|}; \quad t_{21}^1 = \frac{(O_1T_1)_Y}{|\vec{O_1T_1}|}; \quad t_{31}^1 = \frac{(O_1T_1)_Z}{|\vec{O_1T_1}|}. \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

Найдем компоненты единичного вектора \vec{e}_{21} оси x_2 в точке O_2 . Имеем:

$$\begin{aligned} t_{T2} &= (X_2 - X_1)t_{13}^2 + (Y_2 - Y_1)t_{23}^2 + (Z_2 - Z_1)t_{33}^2; \\ (r_{T2})_X &= X_1 + t_{T2}t_{13}^2; \\ (T_2O_2)_X &= X_2 - X_1 - t_{T2}t_{13}^2. \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

Аналогично можно найти

$$\begin{aligned} (T_2O_2)_Y &= Y_2 - Y_1 - t_{T2}t_{23}^2; \\ (T_2O_2)_Z &= Z_2 - Z_1 - t_{T2}t_{33}^2. \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

Далее находим

$$\begin{aligned} \left| \overrightarrow{T_2 O_2} \right| &= \sqrt{(T_2 O_2)_x^2 + (T_2 O_2)_y^2 + (T_2 O_2)_z^2}; \\ t_{11}^2 &= \frac{(T_2 O_2)_x}{\left| \overrightarrow{T_2 O_2} \right|}; \quad t_{21}^2 = \frac{(T_2 O_2)_y}{\left| \overrightarrow{T_2 O_2} \right|}; \quad t_{31}^2 = \frac{(T_2 O_2)_z}{\left| \overrightarrow{T_2 O_2} \right|}. \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

Используя полученные результаты и формулы (3.2.35), найдем компоненты орта \vec{e}_{12} оси y_1 в точке O_1 :

$$t_{12}^1 = t_{23}^1 t_{31}^1 - t_{33}^1 t_{21}^1; \quad t_{22}^1 = t_{33}^1 t_{11}^1 - t_{13}^1 t_{31}^1; \quad t_{32}^1 = t_{13}^1 t_{21}^1 - t_{23}^1 t_{11}^1. \quad (3.2.47)$$

Аналогично находим компоненты орта \vec{e}_{22} оси y_2 в точке O_2 :

$$t_{12}^2 = t_{23}^2 t_{31}^2 - t_{33}^2 t_{21}^2; \quad t_{22}^2 = t_{33}^2 t_{11}^2 - t_{13}^2 t_{31}^2; \quad t_{32}^2 = t_{13}^2 t_{21}^2 - t_{23}^2 t_{11}^2. \quad (3.2.48)$$

Рассмотрим условия опирания оболочки или пластины. В задачах о предельном равновесии ограничения, вытекающие из условий опирания, существенно отличаются от краевых условий, накладываемых теми же опорными устройствами при решении задачи о напряженно-деформированном состоянии упругой конструкции. Рассмотрим, например, линию $O_1 O_2$, вдоль которой осуществляется жесткое защемление оболочки (рис. 3.2.4а). Линию $O_1 O_2$ можно рассматривать как линию стыковки двух жестких элементов: A – диск оболочки с полюсом в точке A , B – опорный неподвижный диск с полюсом в точке B , $O_1 O_2$ – линия разрушения между этими жесткими дисками. Для неподвижного диска B имеем:

$$\vec{v}_B = 0; \quad \vec{\omega}_B = 0. \quad (3.2.49)$$

С учетом (3.2.49) из (3.2.6) получаем:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v}_1 &= -\vec{v}_A - \vec{\omega}_A \times \overrightarrow{AO_1}; \\ \Delta \vec{v}_2 &= -\vec{v}_A - \vec{\omega}_A \times \overrightarrow{AO_2}; \\ \Delta \vec{\omega} &= -\vec{\omega}_A. \end{aligned} \quad (3.2.50)$$

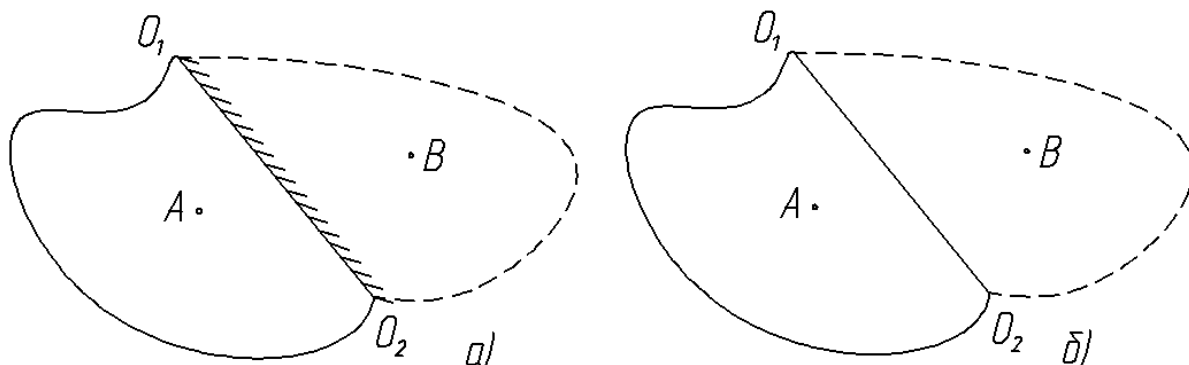


Рис. 3.2.5

Эти значения разрывов скоростей обобщенных перемещений и должны быть использованы при определении мощности внутренних обобщенных сил вдоль линии жесткого защемления O_1O_2 (рис. 3.2.5а), которая в предлагаемом здесь методе жестких элементов и обобщенных линий разрушения является виртуальной линией разрушения.

Рассмотрим теперь свободный край оболочки O_1O_2 (рис. 3.2.5б). Здесь диск А – жесткий диск оболочки с полюсом в точке А, диск В – искусственный диск с полюсом в точке В. В рассматриваемом случае имеют место следующие равенства:

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}; \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}. \quad (3.2.51)$$

Подставив (3.2.51) в (3.2.6), получаем:

$$\Delta \vec{v}_1 \equiv 0; \quad \Delta \vec{v}_2 \equiv 0; \quad \Delta \vec{\omega} \equiv 0. \quad (3.2.52)$$

Значит, вдоль свободного края оболочки мощность внутренних сил тождественно равна нулю. На концах линии O_1O_2 (рис 3.2.5б), совпадающей со свободным краем оболочки, ограничений вида (3.2.17) не записываем (они вырождаются в неравенства $N_1 \geq 0$, $N_2 \geq 0$, которые автоматически учитываются симплекс – методом линейного программирования).

Другие устройства опирания занимают промежуточные положения между жестким защемлением и свободным краем. Они будут отличаться друг от друга тем, какие из внутренних сил и моментов S_α , T_α , Q_α , M_α , H_α не будут давать вклада в суммарную мощность внутренних обобщенных сил (из-за наличия конструктивных степеней свободы). В общей сложности таких разновидностей устройств опирания будет $2^5 = 32$ варианта (сумма различных сочетаний

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}, \quad (3.2.55)$$

где $m = 5$, n пробегает значения 5, 4, 3, 2, 1, 0). Например, 1) все силы и моменты $S_\alpha, \dots, H_\alpha$ совершают работу (жесткое защемление); 2) S_α не совершает работу; 3) S_α и T_α не совершают работу; 4) $S_\alpha, T_\alpha, Q_\alpha$ не совершают работу; 5) $S_\alpha, T_\alpha, Q_\alpha, M_\alpha$ не совершают работу; ...; 32) все $S_\alpha, \dots, H_\alpha$ не совершают работу (свободный край). Отметим, что, при наличии конструктивных степеней свободы, пренебрежение мощностью той или иной обобщенной внутренней силы не накладывает ограничений на разрывы соответствующих обобщенных скоростей перемещений.

При решении конкретных задач о предельном равновесии элементов конструкций возникает необходимость уменьшения (что связано с возможностями ЭВМ и экономией машинного времени) и бывает возможным уменьшение (что связано с физической картиной разрушения) размерности соответствующей задачи линейного программирования. Например, пусть в результате предварительного решения задачи при грубом разбиении оболочки на жесткие элементы (или в результате физических экспериментов, или каким-либо другим образом) получены результаты, показывающие, что в процессе разрушения оболочки крутящий момент H_α вносит незначительный вклад в суммарную мощность обобщенных внутренних сил. Тогда при следующих итерациях (при более детальном и точном разбиении оболочки на жесткие диски) работу момента H_α исключаем из рассмотрения. Это осуществляется путем обнуления слагаемых $H_{\alpha i}^* \Delta \omega_{12}, H_{\alpha i}^* \Delta \omega_{22}$ в соотношениях (3.2.13), т.е. в формулах (3.2.18) нужно положить $H_{\alpha i}^* \equiv 0$. Но при этом к ограничениям задачи линейного программирования должны быть добавлены равенства

$$\Delta \omega_{12} = 0, \quad \Delta \omega_{22} = 0 \quad (3.2.56)$$

соответственно в начале и конце каждой линии разрушения.

Если пластинка или оболочка разрушаются в основном путем сосредоточенных изгибов по определенным линиям, то нужно учитывать работу только момента M_α . В этом случае в формулах (3.2.18) нужно положить $S_{\alpha i}^* = T_{\alpha i}^* = Q_{\alpha i}^* \equiv 0, H_{\alpha i}^* \equiv 0$. Но при этом к ограничениям задачи линейного программирования добавляются:

в точке O_1 линии разрушения O_1O_2

$$\begin{aligned}\Delta v_{11} &= 0; \quad \Delta v_{12} = 0; \quad \Delta v_{13} = 0; \\ \Delta \omega_{12} &= 0;\end{aligned}\tag{3.2.57}$$

в точке O_2 линии разрушения

$$\begin{aligned}\Delta v_{21} &= 0; \quad \Delta v_{22} = 0; \quad \Delta v_{23} = 0; \\ \Delta \omega_{22} &= 0;\end{aligned}\tag{3.2.58}$$

Аналогично поступаем и при решении других частных видов общей задачи о предельном равновесии оболочек и пластин.

С другой стороны, могут встретиться задачи, в которых отсутствие вклада той или иной обобщенной внутренней силы в суммарную мощность обусловлено конструктивными особенностями оболочки или пластины. Например, пусть на одной из линий срединной поверхности S_0 имеется конструктивный цилиндрический шарнир. Рассматривая эту линию как виртуальную линию разрушения O_1O_2 , работу изгибающего момента M_α на этой линии принимаем равной нулю. В соответствующих ограничениях вида (3.2.13) положим $M_{\alpha i}^* \Delta \omega_{11} \equiv 0$, $M_{\alpha i}^* \Delta \omega_{21} \equiv 0$. Но при этом не требуем выполнения условий $\Delta \omega_{11} = 0$, $\Delta \omega_{21} = 0$ на концах линии O_1O_2 .

Аналогично поступаем и при наличии других конструктивных особенностей изделия, дающих ей ту или иную степень свободы.

3.3. Алгоритм метода жестких элементов и обобщенных линий разрушения (алгоритм A2)

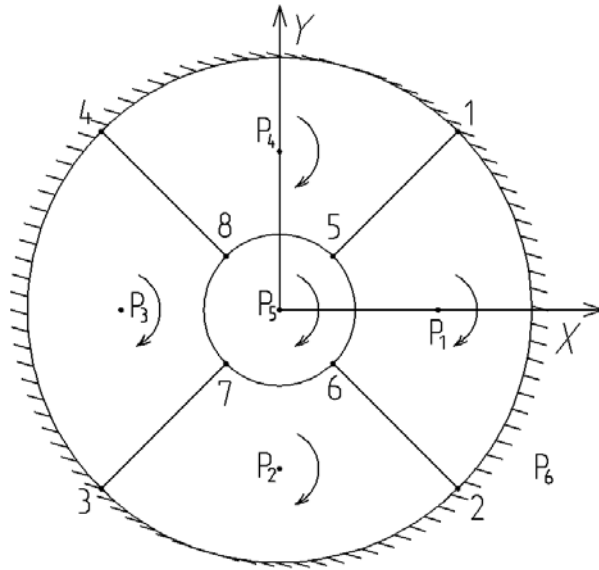


Рис. 3.3.1

На основе полученных соотношений разработан алгоритм (алгоритм A2) определения верхней оценки μ^+ параметра внешнего нагружения. Суть этого алгоритма заключается в следующем:

1. Разбиваем оболочку или пластинку на жесткие элементы с помощью виртуальных линий разрушения (рис. 3.3.1), производим нумерацию узлов. Нумерация узлов носит субъективный характер. Первоначальное разбиение оболочки на жесткие элементы также носит субъективный характер (для более удачного разбиения может быть использована имеющаяся информация, например, результаты экспериментов над аналогичными конструкциями).
2. Указываем полюса жестких элементов P_1, P_2, \dots, P_{n_3} , где n_3 – число всех жестких элементов. Приводим все внешние нагрузки, действующие на j -ый жесткий элемент, к его полюсу P_j ($j = \overline{1, n_3}$).
3. Записываем выражение (3.2.3) для мощности внешних нагрузок.
4. Записываем выражение (3.2.10) для целевой функции задачи линейного программирования и ограничение (3.2.11).
5. Для каждого узла разбиения оболочки определяем соответствующую

поверхность прочности, осуществляем ее аппроксимацию многогранником.

6. Нумерацию виртуальных линий разрушения осуществляем двумя числами. Все жесткие элементы, начиная с элемента с полюсом P_1 , обходим по часовой стрелке. Жесткие элементы обходим по возрастающим номерам полюсов P_j . При обходе каждого нового жесткого элемента отмечаем только те виртуальные линии разрушения, которые не были отмечены при обходе предыдущих жестких элементов. За начало линии разрушения принимаем номер того узла, который встречается раньше при обходе данного жесткого элемента (точка O_1 для данной линии разрушения), а за конец линии разрушения – номер следующего узла, который встречается при обходе данного жесткого элемента (точка O_2 для данной линии разрушения). Из двух соседних жестких элементов, между которыми располагается данная линия разрушения O_1O_2 , за элемент А принимаем элемент с меньшим номером полюса, а за элемент В – элемент с большим номером полюса. Благодаря этим правилам достигается однозначие при назначении локальных систем координат $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$, связанных с линией разрушения O_1O_2 для всех линий разрушения (рис. 3.2.2).
7. Определяем, используя формулы (3.2.36), ..., (3.2.48), компоненты ортов локальных систем координат $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$ в неподвижной системе координат $OXYZ$ (для каждой виртуальной линии разрушения).
8. Определяем углы α как углы между осями α_1 и y_1 , α_1 и y_2 в начале и в конце каждой линии разрушения O_1O_2 (рис. 3.2.3). Здесь оси α_1 , α_2 – это оси, в которых записаны уравнения исходных поверхностей прочности (в частности α_1 , α_2 могут совпасть с линиями главных кривизн поверхности приведения S_0 оболочки). Используя координаты каждой вершины многогранника прочности, по формулам (3.2.12) определяем соответствующие этой вершине, и рассматриваемой линии разрушения, предельные значения внутренних обобщенных сил T_α^* , S_α^* , M_α^* , H_α^* , Q_α^*

9. По формулам (3.2.18) и аналогичным им определяем коэффициенты в ограничениях (3.2.17).
10. Записываем ограничения вида (3.2.17) для каждой линии разрушения.
11. Если необходимо, учитываем упрощения и ограничения, связанные с конструктивными особенностями изделия.
12. Ограничения, обусловленные условиями опирания оболочки или пластинки, имеют вид (3.2.17).
13. Если это возможно, используем симметрию конструкции, нагрузок и картины разрушения для уменьшения размерности задачи линейного программирования.
14. Существенное уменьшение размерности задачи линейного программирования может быть достигнуто следующим образом. Путем добавления в правые части некоторых ограничений вида (3.2.17) дополнительных неотрицательных переменных, эти ограничения можно записать в виде равенств. Используя полученную таким образом систему уравнений, можно исключить из рассмотрения знакопеременные величины v_{AX} , v_{AY} , ..., ω_{BY} , ω_{BZ} . После решения задачи линейного программирования можно вернуться к переменным v_{AX} , ..., ω_{BZ} .
15. В результате решения задачи линейного программирования определяем $\min \mu^+$ и соответствующее поле переменных N_1 , N_2 (для каждой линии разрушения) и v_{AX} , v_{AY} , ..., ω_{BZ} (для каждого жесткого элемента оболочки).
16. Анализируем полученные результаты. В областях интенсивного разрушения оболочки величины суммарных мощностей внутренних обобщенных сил N_1 , N_2 будут отличаться от соответствующих величин в областях менее интенсивного разрушения, сравнительно большими значениями. Используя полученное поле значений N_1 , N_2 , уточняем картину разбиения оболочки на виртуальные жесткие элементы и повторяем ре-

шение задачи – начиная с пункта №2 настоящего алгоритма. Удовлетворительным считаем решение, соответствующее $\inf \mu^+$.

На рис. 3.3.1 показан пример разбиения на жесткие элементы защемленной круглой пластинки. При обходе жесткого элемента P_1 встречаем линии разрушения 1–2, 2–6, 6–5, 5–1; при обходе жесткого элемента P_2 встречаем новые линии разрушения 2–3, 3–7, 7–6; при обходе жесткого элемента P_3 встречаем новые линии разрушения 3–4, 4–8, 8–7; при обходе жесткого элемента P_4 встречаем новые линии разрушения 4–1, 5–8; при обходе жестких элементов P_5 , P_6 новых линий разрушения не встречаем (P_6 – полюс опорного жесткого диска). Здесь, например, для линии разрушения 8–7 началом является узел №8 (точка O_1 для линии 8–7), концом – узел №7 (точка O_2 для линии 8–7). Для линии разрушения 8–7 жесткий элемент P_3 соответствует элементу А на рис 3.2.2, а жесткий элемент P_5 – элементу В на этом же рисунке.

3.3.1. Подготовка исходных данных для ЭВМ (алгоритм А3)

Для решения задачи методом ЖЭиОЛР необходимо подготовить соответствующий набор исходных данных, который впоследствии можно будет использовать в задаче линейного программирования. Разобьем процесс определения исходных данных на несколько этапов. Для наглядности продемонстрируем этот алгоритм (алгоритм А3) на простом примере. Рассмотрим железобетонный купол, шарнирно опертый вдоль экватора, толщиной 65 мм, радиус его срединной поверхности 0.4525 м, нагрузка – сосредоточенная сила в вершине. На рис. 3.3.2 изображена одна из возможных схем разрушения такого купола (проекция на плоскость XOY).

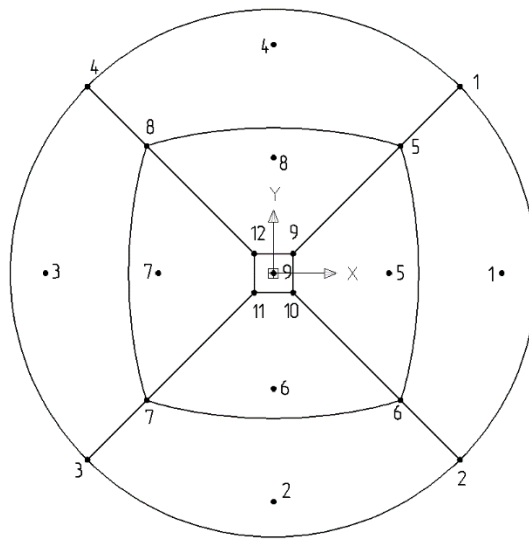


Рис. 3.3.2

1. Определить количество и задать координаты точек для рассматриваемой конструкции, которые будут являться началами и концами виртуальных линий разрушения, расположенных по внешнему контуру (они будут считаться опорными). Например, если рассматриваемая конструкция – купол, количество виртуальных линий разрушения на опорном контуре – 4, то задаем на этом шаге 4 точки, определяем координаты этих точек (точки 1, 2, 3, 4 на рис. 3.3.2).
2. Определить количество и задать координаты точек для рассматриваемой конструкции, которые будут являться началами или концами виртуальных линий разрушения, расположенных не по контуру (точки 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 на рис. 3.3.2).
3. Определить количество виртуальных линий разрушения. На рис. 3.3.2 такими линиями будут: 1-2, 2-3, 3-4, 4-1 (опорные линии); 5-6, 6-7, 7-8, 8-5, 1-5, 2-6, 3-7, 4-8, 5-9, 6-10, 7-11, 8-12, 9-10, 10-11, 11-12, 12-9. Порядковый номер линии разрушения присваивается произвольно.
4. Определить количество виртуальных жестких дисков. На рис. 3.3.2 количество жестких дисков равно 9, полюса обозначены цифрами $\overline{1,9}$.
5. Определить координаты полюсов жестких дисков (точки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 на рис. 3.3.2). Для краткости записи, букву P при обозначениях полюсов жестких дисков будем опускать.

6. Для каждой линии разрушения определить, согласно п. 6 алгоритма А2, какие точки будут приняты за O_1 и O_2 соответственно (например, для линии 7-6 на рис. 3.3.2 точку №7 принимаем за O_1 , точку №6 – за O_2).
7. Для каждой линии разрушения определить, согласно п. 6 алгоритма А2, какой из дисков будет А, какой В. Отметим, что «обход» жестких дисков сложно поддается автоматизации (ввиду ассоциативности процесса). Поэтому предлагается заменить «обход» следующим действием. Рассмотрим какую-либо линию разрушения. Тогда для этой линии примем за диск А диск с меньшим порядковым номером, за диск В – диск с большим номером. Для опорных линий разрушения – диск А – это диск, принадлежащий оболочке, диск В – жесткая опора или свободное пространство. Начало линии (точка O_1) определим из условия обхода по часовой стрелке (если смотреть с конца внешней нормали к поверхности из полюса диска А) трех точек: 1-я точка – полюс диска А, 2-я – предполагаемая точка O_1 , 3-я – предполагаемая точка O_2 . Таким образом, получим аналогичное п. 6 распределение на диски А или В, точки O_1 или O_2 . Объясняется это тем, что согласно п. 6, за точку O_1 принимается та, что встречается раньше при обходе (заменен обходом по часовой стрелке трех точек).
8. Для каждой опорной линии определить соответствующие краевые условия, например, жесткое защемление, шарнирная опора или свободный край. Допускается 32 варианта краевых условий.
9. Для каждой обычной линии определить ее тип (конструктивный шарнир, обычная линия).
10. Определить для каждой виртуальной линии разрушения, какие из внутренних обобщенных сил развивают мощности на соответствующих разрывах скоростей обобщенных перемещений.
11. Для каждого диска собрать по формулам 3.2.4 и 3.2.5 постоянную и параметрическую нагрузки в виде: $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$, где F_x – проекция главного вектора внешних сил, приложенных к какому-либо жесткому

диску, на глобальную ось X , M_y – проекция главного момента внешних сил, приложенных к какому-либо жесткому диску, на глобальную ось Y , аналогично для F_y , F_z , M_x , M_z . Ниже в п. 3.3.4 будет приведен один из возможных способов определения главного вектора и главного момента равномерно распределенной вертикальной нагрузки.

12. Для каждой точки определить направление оси α_1 в глобальной системе координат (для определения углов α , см. п.8 алгоритма A2). Направление оси α_1 совпадает с направлением оси ξ_1 (рис. 2.2.1). Например, для купола осью ξ_1 может являться касательная к меридиану в рассматриваемой точке.
13. Для каждой точки (см. п.п. 1 и 2) задать гиперповерхность прочности. Линейную гиперповерхность прочности получаем следующим образом:
 - Используем уравнения (2.2.11) гиперповерхности прочности для композитных оболочек.
 - Определяем сечения этой гиперповерхности координатными плоскостями $T_{11}OT_{22}$, $M_{11}OM_{22}$, $Q_{31}OQ_{32}$, используя алгоритм A1.
 - Для каждого такого сечения задаемся точностью аппроксимации (а именно – количеством точек на линии сечения).
 - Согласно алгоритму A1, получим необходимое количество аппроксимирующих точек на каждом сечении. Например, для сечения плоскостью $T_{11}OT_{22}$ получим совокупность точек с координатами $\{T_{11}, T_{12} \approx 0, T_{22}, M_{11} \approx 0, M_{12} \approx 0, M_{22} \approx 0, Q_{31} \approx 0, Q_{32} \approx 0\}$, для сечения плоскостью $M_{11}OM_{22}$ – точки с координатами $\{T_{11} \approx 0, T_{12} \approx 0, T_{22} \approx 0, M_{11}, M_{12} \approx 0, M_{22}, Q_{31} \approx 0, Q_{32} \approx 0\}$.
 - Для каждой из точек O_1 и O_2 получим n значений вектора $\{T_{11}^*, T_{12}^*, T_{22}^*, M_{11}^*, M_{12}^*, M_{22}^*, Q_{31}^*, Q_{32}^*\}$, где $n=i+k+l$, i – количество аппроксимирующих точек на сечении $T_{11}OT_{22}$, k – количество аппроксимирующих точек на сечении $M_{11}OM_{22}$, l – количество аппроксимирующих точек на сечении $Q_{31}OQ_{32}$. Совокупность из n векторов и определяет вершины аппрокси-

мирующего многогранника гиперповерхности прочности для рассматриваемой точки рассматриваемой линии разрушения.

3.3.2. Определение коэффициентов в соотношениях задачи линейного программирования

Введем следующие условные обозначения:

- d – количество виртуальных жестких дисков, на которые разбиваем конструкцию;
- l – количество виртуальных линий разрушения, вдоль которых происходит диссипация внутренней энергии деформирования;
- c_1 – количество точек, которые определяют начала и концы опорных линий разрушения;
- c_2 – количество остальных точек, определяющих начала или концы остальных линий разрушения;
- t_1 – количество аппроксимирующих точек гиперповерхности прочности для точки, определяющей начало какой-либо линии разрушения;
- t_2 – количество аппроксимирующих точек гиперповерхности прочности для точки, определяющей конец какой-либо линии разрушения.

Порядок составления условий задачи линейного программирования следующий:

- Количество неизвестных для задачи составит: $d \cdot 6 \cdot 2 + l \cdot 2$, здесь 6 – проекции скоростей перемещений полюсов и поворотов жестких дисков, 2 – учет дублирования коэффициентов первой группы с обратными знаками (см. ниже); $l \cdot 2$ – мощности, развиваемые на началах и концах l линий разрушения.
- Количество ограничений для задачи ЛП составит: $l \cdot (t_1 + t_2) + l$; здесь для каждой линии разрушения в начале и в конце составляется t_1 и t_2 ограничений; каждое ограничение соответствует одной аппроксимирующей точке на гиперповерхности прочности. Последнее ограничение соответствует условию (3.2.11).

Рассмотрим определение коэффициентов неравенства (3.2.17). Коэффициенты в ограничениях задачи линейного программирования условно разделим на две группы:

- коэффициенты при неизвестных скоростях ($v_{ix}, v_{iy}, \dots, \omega_{iy}, \omega_{iz}$, где $i = \overline{1, d}$, v_{ix} , например – проекция на глобальную ось X скорости перемещения полюса i -го диска), эта группа при знакопеременных величинах;
- коэффициенты при неизвестных мощностях (N_{j1}, N_{j2} , где $j = \overline{1, l}$, N_{j1} – погонная мощность внутренних силовых факторов в начале j -ой линии разрушения, N_{j2} – погонная мощность внутренних силовых факторов в конце j -ой линии разрушения), это группа коэффициентов при неотрицательных переменных.

Для определения первой группы коэффициентов воспользуемся формулами (3.2.18). Соответствие этих коэффициентов неизвестным $v_{ix}, v_{iy}, \dots, \omega_{iy}, \omega_{iz}$ возьмем согласно (3.2.17), причем, вместо v_{AX} или v_{BX} подставляем v_{iX} следующим образом: если для этой линии разрушения диск с номером 3 является диском А, диск с номером 4 – диском В, то $v_{AX} \rightarrow v_{3X}$, $v_{BX} \rightarrow v_{4X}$ (рис. 3.3.2, линия разрушения 4-8).

Таким образом, для каждого ограничения в задаче линейного программирования будут определены коэффициенты соответствующих неравенств (3.2.17) (для точки O_1 первая группа, для O_2 – вторая) при неизвестных скоростях перемещений тех дисков, которые относятся к линии разрушения, для которой эти ограничения составлены. Коэффициенты при неизвестных скоростях перемещений других дисков, не относящихся к рассматриваемой линии разрушения, будут равны нулю.

Симплекс метод линейного программирования предполагает, что переменные задачи являются неотрицательными. Поэтому знакопеременные величины $v_{ix}, v_{iy}, v_{iz}, \omega_{ix}, \omega_{iy}, \omega_{iz}$ представим в виде

$$v_{ix} = v'_{ix} - v''_{ix}, \quad v_{iy} = v'_{iy} - v''_{iy}, \quad v_{iz} = v'_{iz} - v''_{iz},$$

$$\omega_{ix} = \omega'_{ix} - \omega''_{ix}, \quad \omega_{iy} = \omega'_{iy} - \omega''_{iy}, \quad \omega_{iz} = \omega'_{iz} - \omega''_{iz},$$

где $v'_{ix} \geq 0, v''_{ix} \geq 0, v'_{iy} \geq 0, \dots, \omega'_{iz} \geq 0, \omega''_{iz} \geq 0$.

В качестве примера приведем пакет исходных данных, подготовленный для расчета коэффициентов задачи линейного программирования. В качестве примера рассмотрен железобетонный купол, горизонтальная проекция которого приведена на рис. 3.3.2. Купол состоит из 9 жестких дисков, имеет 20 линий разрушения. Расположение линий разрушения примем согласно [63].

В таблице 3.3.3.1 приведены исходные данные для линий разрушения, которые необходимы для определения коэффициентов задачи линейного программирования. Здесь угол α (в точках O_1 и O_2) равен углу между осями ξ_1 и y_2 ; ось ξ_1 совпадает с касательной к меридиану.

Таблица 3.3.3.1

№ линии	Точка O_1	Точка O_2	Диск А	Диск В	Длина, м	α в точке O_1 , рад	α в точке O_2 , рад
1	1	2	1	0	0.710785	0	0
2	2	3	2	0	0.710785	0	0
3	3	4	3	0	0.710785	0	0
4	4	1	4	0	0.710785	0	0
5	6	5	1	5	0.45541	-2.51013	2.51013
6	7	6	2	6	0.45541	-2.51013	2.51013
7	8	7	3	7	0.45541	-2.51013	2.51013
8	5	8	4	8	0.45541	-2.51013	2.51013
9	10	9	5	9	0.066952	-2.35894	2.35894
10	11	10	6	9	0.066952	-2.35894	2.35894
11	12	11	7	9	0.066952	-2.35894	2.35894
12	9	12	8	9	0.066952	-2.35894	2.35894
13	5	1	1	4	0.371188	1.570796	1.570796
14	2	6	1	2	0.371188	-1.570796	-1.570796
15	3	7	2	3	0.371188	-1.570796	-1.570796
16	4	8	3	4	0.371188	-1.570796	-1.570796
17	9	5	5	8	0.292212	1.570796	1.570796
18	6	10	5	6	0.292212	-1.570796	-1.570796
19	7	11	6	7	0.292212	-1.570796	-1.570796
20	8	12	7	8	0.292212	-1.570796	-1.570796

Оболочка нагружена сосредоточенной вертикальной нагрузкой. Коэффициенты для ограничения (3.2.11) приведены в таблице 3.3.3.2.

Таблица 3.3.3.2

Диск, i	F_x^{0i}	F_y^{0i}	F_z^{0i}	M_x^{0i}	M_y^{0i}	M_z^{0i}
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

7	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	-1	0	0	0

Как видно из таблицы, нагрузка приложена только к диску №9 в вершине купола (вертикально вниз).

3.3.3. Построение кратчайшей плоской линии разрушения на поверхности оболочки с заданной точностью. Алгоритм А4

Одной из особенностей нашего метода является использование кривых в качестве линий разрушения. Поэтому возникает ряд вопросов, таких как определение длины такой линии, а также положения ее в пространстве. В связи с этим, рассмотрим один из возможных вариантов аппроксимации кривых линий, позволяющего определить:

- длину виртуальной линии разрушения, лежащей на поверхности рассматриваемой конструкции;
- координаты аппроксимирующих точек на линии разрушения.

Рассмотрим метод построения с определенной точностью кратчайшей плоской линии разрушения на поверхности оболочки, заданной уравнением вида $F(X,Y,Z)=0$, если известны координаты начала (точка $O_1 (X_1, Y_1, Z_1)$) и конца (точка $O_2 (X_2, Y_2, Z_2)$) этой линии разрушения, а также задана точность аппроксимации (в виде количества аппроксимирующих точек на рассматриваемой линии).

1. Определим координаты вектора внешней нормали $\vec{n} (a_1, b_1, c_1)$ к поверхности в начале линии разрушения (в точке O_1):

$$a_1 = \frac{\partial F(X_1, Y_1, Z_1)}{\partial X}, \quad b_1 = \frac{\partial F(X_1, Y_1, Z_1)}{\partial Y}, \quad c_1 = \frac{\partial F(X_1, Y_1, Z_1)}{\partial Z}. \quad (3.3.3.1)$$

2. Определим координаты единичного вектора \vec{m} , лежащего в плоскости нормали \vec{n} и прямой O_1O_2 , нормального к O_1O_2 :

$$\vec{m} = \frac{(\overrightarrow{O_1O_2} \times \vec{n}) \times \overrightarrow{O_1O_2}}{\left| (\overrightarrow{O_1O_2} \times \vec{n}) \times \overrightarrow{O_1O_2} \right|}. \quad (3.3.3.2)$$

3. Определим предельный угол отклонения α от направления, заданного вектором \vec{m} (предварительно можно принять $\alpha=\pi/3$). На этот угол будет

отклоняться пучок плоскостей в обе стороны от плоскости, содержащей \vec{m} и O_1O_2 . Это ограничение введено в связи с необходимостью исключения определения линий разрушения в плоскостях, где они заведомо не являются кратчайшими.

4. Определим координаты вектора \vec{l}_i в плоскости, перпендикулярной ($\vec{m}, \overrightarrow{O_1O_2}$), повернутого на угол φ от направления нормали \vec{m} , где $\varphi = +\alpha, \dots, -\alpha$:

$$l_j^i = \cos(\varphi) \cdot m_j + \sin(\varphi) \cdot (\vec{m} \times \overrightarrow{O_1O_2})_j, \quad (3.3.3.3)$$

где $j=1, \dots, 3$ (проекции вектора на оси X, Y, Z).

Определим уравнение i -й плоскости ($\overrightarrow{O_1O_2}, \vec{l}_i$) из пучка плоскостей, определяемых уравнениями вида $(Ax + By + Cz + D)_i = 0$; коэффициенты этого уравнения определяются координатами трех точек $O_k(X_k, Y_k, Z_k)$, $k = \overline{1, 3}$, где $X_3 = X_1 + l_1^i$, $Y_3 = Y_1 + l_2^i$, $Z_3 = Z_1 + l_3^i$; имеем:

$$A_i = \begin{vmatrix} 1 & Y_1 & Z_1 \\ 1 & Y_2 & Z_2 \\ 1 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}; B_i = \begin{vmatrix} X_1 & 1 & Z_1 \\ X_2 & 1 & Z_2 \\ X_3 & 1 & Z_3 \end{vmatrix}; C_i = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix}; D_i = - \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}; \quad (3.3.3.4)$$

5. Разобьем отрезок O_1O_2 на k равных частей: T_{j-1}, T_j ($j = \overline{1, k}$), где $T_0 = O_1$, $T_k = O_2$. Каждая такая точка соответствует аппроксимирующей точке на поверхности оболочки.
6. Определим координаты аппроксимирующих точек, принадлежащих линии пересечения i -ой плоскости $(Ax + By + Cz + D)_i = 0$ с поверхностью. С этой целью
- а) для каждой точки (их всего $k-1$) составим систему из двух уравнений, из которых первое – это уравнение i -ой плоскости пучка, второе – уравнение поверхности;
 - б) в системе вместо неизвестной, определяемой при помощи $\max(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$, где $\Delta X = |X_{o_2} - X_{o_1}|$, $\Delta Y = |Y_{o_2} - Y_{o_1}|$, $\Delta Z = |Z_{o_2} - Z_{o_1}|$, подставляем

соответствующую координату точки T_j ;

- с) полученную систему с двумя неизвестными решаем методом Ньютона с некоторой точностью.

Вычислительные эксперименты показали, что нет необходимости задавать высокую точность; для решения уравнений задаем начальное приближение, коим является точка на прямой O_1O_2 . Дальнейшие приближения довольно быстро сходятся к искомому решению уравнений. Заметим лишь, что сходимость зависит от вида поверхности. Хорошая сходимость наблюдается для сферы, немного хуже процесс сходится для цилиндрической поверхности.

Пример такой системы уравнений, например, для сферической поверхности:

$$\begin{cases} X^2 + 0.1066567^2 + Z^2 - 0.4525^2 = 0, \\ -0.55420 \cdot X + 0.1066567 + 0.31997 \cdot Z + 0.177328748878393 = 0. \end{cases} \quad (3.3.3.5)$$

Здесь 0.106657 – известная координата (Y), 0.4525 – радиус сферы. Согласно методу Ньютона строится последовательность точек, получаемых с использованием обращенной матрицы Якоби (матрицы частных производных). Следующая точка выбирается так, чтобы в ней линейная аппроксимация функционала (сумма квадратов разностей текущего и предыдущего значений переменных) обращалась в ноль. В отличие от обычного метода Ньютона, где матрица Якоби обращается на каждом шаге, в модифицированном методе Ньютона используется обращенная матрица Якоби, вычисленная только в начальной точке;

- d) после нахождения аппроксимирующей точки делаем шаг вдоль прямой O_1O_2 , получаем на ней следующую точку и повторяем п.п. а) – с).
7. Получив массив точек, принадлежащих линии пересечения i -ой плоскости пучка с поверхностью, построим ломаную, аппроксимирующую искомую линию разрушения. Вычислим длину ломаной линии.
 8. Изменяя угол поворота φ , получаем новое направление нормали \vec{m} (п.5), выполняем действия, описанные в п.п. 5 – 8 для нового вектора \vec{m} .
 9. В результате получаем некоторое количество ломаных линий разрушения, соответствующих пучку плоскостей, проведенных через прямую O_1O_2 . Искомой является та ломаная линия, которая имеет наименьшую

длину.

Для реализации описанного выше способа аппроксимации кривой линии разрушения, была разработана подпрограмма, реализующая метод нахождения кратчайшей плоской линии разрушения на поверхности. Применены следующие вспомогательные методы и модули:

- Модифицированные методы Е. Дьяченко [28] обработки и вычисления строковых выражений для определения частной производной функции.
- Модифицированный метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений.

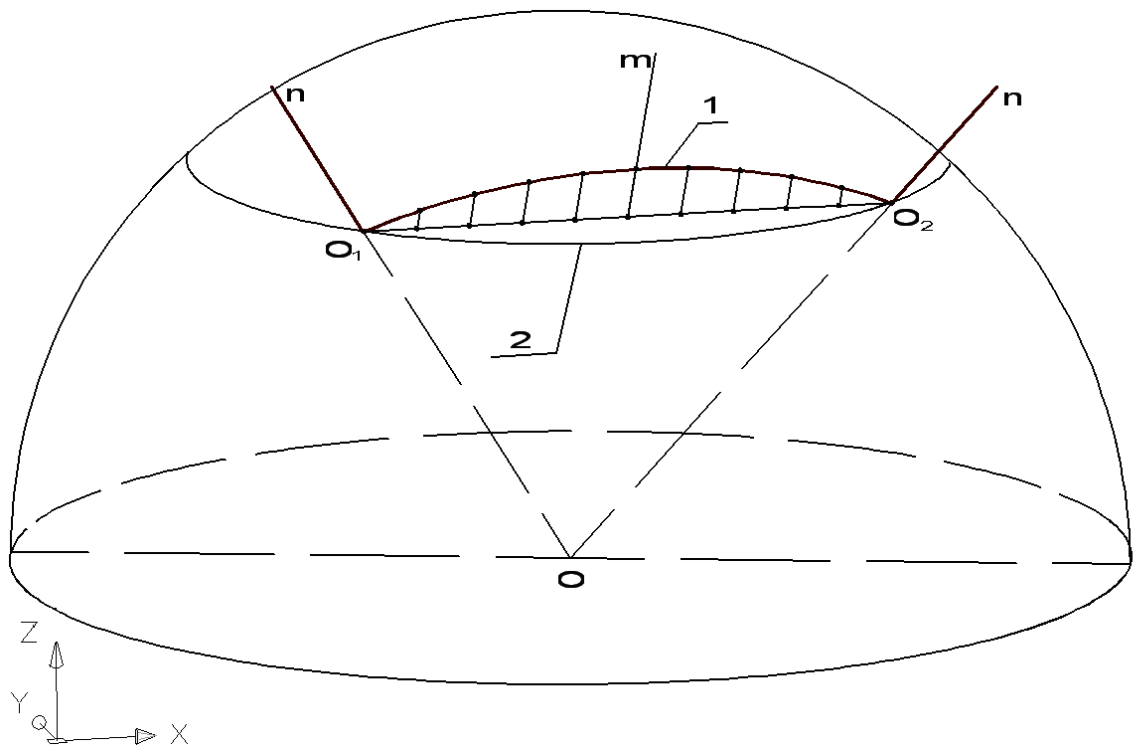


Рис. 3.3.3

На рис. 3.3.3 представлен пример ломаной (линия 1), полученной по предлагаемому методу для сферы (линия 2 – параллель). Заметим, что полученная ломаная лежит в плоскости OO_1O_2 , где O – центр сферы, то есть аппроксимирует геодезическую линию на сфере.

На рис. 3.3.4 показаны точки и ломаные линии, полученные этим методом для цилиндрической оболочки.

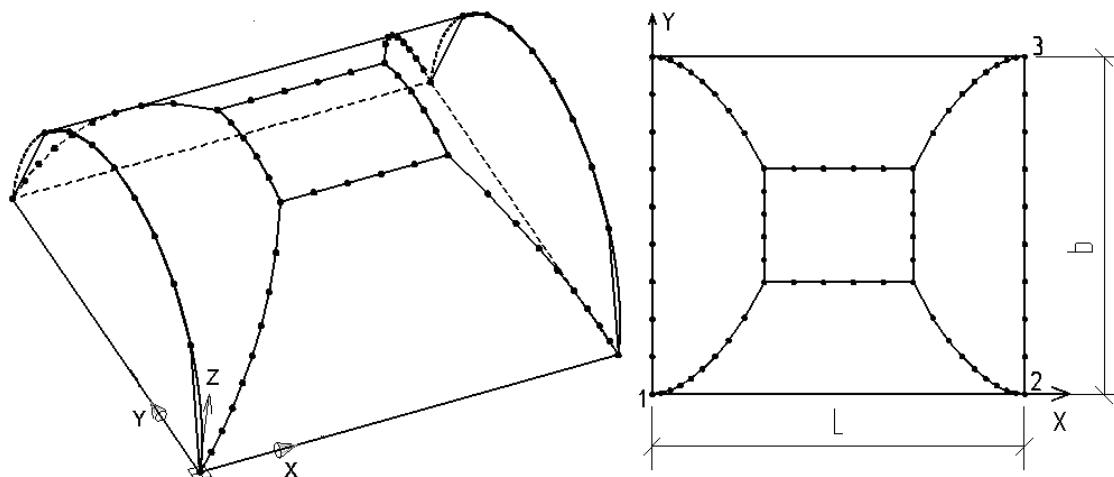


Рис. 3.3.4

Таким образом, получаем длину линии разрушения с определенной точностью, а также массив точек, принадлежащих этой линии.

3.3.4. Преобразование равномерно распределенной вертикальной нагрузки. Алгоритм А5

Приведем один из возможных вариантов определения главного вектора и главного момента сил, приведенных к полюсу жесткого элемента (для равномерно распределенной вертикальной нагрузки). Рассмотрим алгоритм определения главного вектора и главного момента на примере цилиндрической оболочки (рис. 3.3.5).

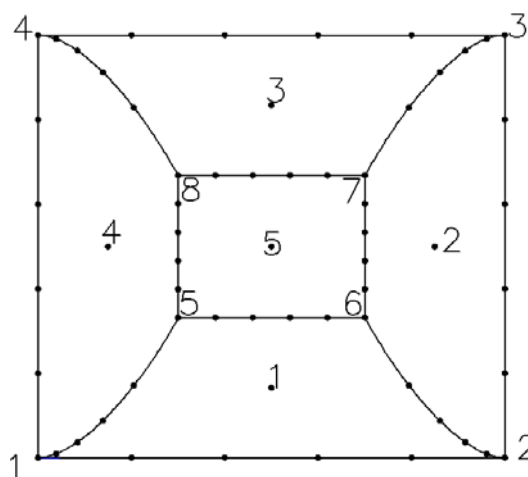


Рис. 3.3.5

Оболочка состоит из 5 виртуальных жестких дисков, обозначены аппроксимирующие точки на виртуальных линиях разрушения, координаты которых найдены согласно алгоритму А4. Предположим, что к диску №1 приложена вертикальная равномерно распределенная нагрузка. Требуется определить главный вектор и

главный момент этой нагрузки, приведенные к полюсу жесткого диска №1.

Заметим, что с некоторой погрешностью можно найти главный вектор и главный момент вертикальной равномерно распределенной нагрузки, приняв линии 6-2 и 5-1 за прямые. Тогда $F_x=F_y=0$, $F_z=pA$, где $A(\text{м}^2)$ – площадь трапеции 1-5-6-2, p (кН/м^2) – интенсивность равномерно распределенной вертикальной нагрузки; если полюс диска 1 находится на центре средней линии трапеции 1-5-6-2, то $M_y=M_z=0$, M_x находится из разности моментов относительно полюса 1 «верхнего» и «нижнего» (относительно средней линии) частей нагрузки, приложенной к диску 1 (рис. 3.3.6).

Подобное упрощение допустимо, если проекции линий 1-5 или 6-2 на плоскость XOY близки к отрезкам. Замена же отрезком сложной по очертанию линии приведет к большей погрешности. Ниже приведен способ вычисления главного вектора и главного момента внешних сил, приложенных на диск, который позволяет автоматизировать процесс для ЭВМ.

Рассмотрим диск 1, нагруженный, например, зависящей от параметра μ вертикальной равномерно распределенной нагрузкой. Нами для этой цилиндрической оболочки уже решена задача по определению длин линий разрушения, получены координаты аппроксимирующих эти линии точек (согласно алгоритму А4). На рис. 3.3.6 изображена проекция диска 1 на плоскость XOY с указанием аппроксимирующих точек на линиях разрушения.

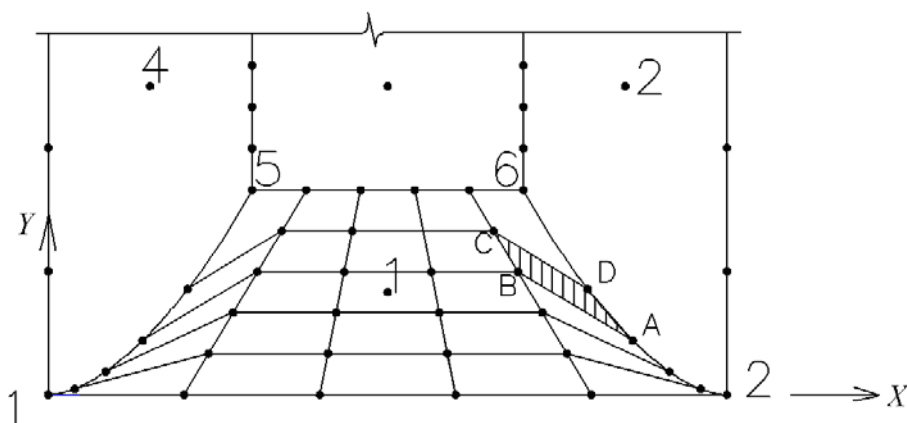


Рис. 3.3.6

Необходимо определить главный вектор и главный момент вертикальной равномерно распределенной нагрузки на этот диск. Алгоритм приведения сил к полюсу

1 (алгоритм А5):

1. Используем координаты аппроксимирующих точек на линиях разрушения, а также количество этих точек, полученных согласно алгоритм А4. Например, если линию разрушения разделяли на 5 частей (рис. 3.3.6), то получим 4 аппроксимирующие точки; кроме того, имеем точки начала и конца линии разрушения.
2. Используем тот факт, что в случае вертикальной нагрузки, для определения моментов M_X и M_Y координаты точек приложения сил по оси Z не оказывают влияния на длину плеч относительно осей X и Y .
3. Разобьем проекцию диска на плоскость XOY на n^2 частей (n – количество участков на линии разрушения). Для рассматриваемой цилиндрической оболочки получим 25 участков ($5 \cdot 5$). Для этого необходимо:
 - Найти самую длинную линию разрушения (обозначим ее «длинная»), линия 2-1 на рис. 3.3.6;
 - за линию «короткая» примем ту, которая находится напротив линии «длинная» (номера точек начала или концов этих линий не совпадают), линия 5-6 на рис. 3.3.6;
 - линия «левая» – та линия из четырех, начало которой совпадает с концом линии «длинная», 1-5;
 - линия «правая» – начало ее совпадает с концом линии «короткая», 6-2;
 - пусть $k = 1..n-1$ (аппроксимирующие точки на линии разрушения, сюда не входят точки O_1 и O_2). Соединим k -ю точку на линии «короткая» и 1-ю точку на линии «длинная» (на рис. 3.3.6 – точки, ближняя к 2 на линии 2-1, и к 6 на линии 5-6), затем $(k-1)$ -ю на «короткой» и 2-ю на «длинной» и так далее. Получим отрезки, соединяющие аппроксимирующие точки на линиях «длинная» и «короткая»;
 - разобьем эти отрезки на n частей, получим k точек на каждом из них (рис 3.3.6);
 - соединив соответствующим образом промежуточные точки, получим сетку из n^2 четырехугольников, таких как, например $ABCD$ на рис. 3.3.6.

4. Главный вектор найдем как $\vec{F}^0 = \vec{p} \cdot \sum_{i=1}^{n^2} A_i$, где p – величина нагрузки, кПа,

$\sum_{i=1}^{n^2} A_i$ сумма площадей четырехугольников.

5. Главный момент найдем как $\vec{M}^0 = \sum_{i=1}^{n^2} \vec{r}_i \times (\vec{p} \cdot A_i)$, где r_i – вектор, начало которого – полюс диска 1, конец – координата центра тяжести i -го четырехугольника.

Такой способ аппроксимации равномерно распределенной вертикальной нагрузки на диск, граничащий с четырьмя линиями разрушения, позволяет автоматизировать (с заданной точностью) выполнение одного из пунктов при определении несущей способности оболочек с использованием ЭВМ (позволяет работать с четырехугольниками, стороны которых являются кривыми линиями).

4. Результаты расчетов и их анализ

4.1. О достоверности результатов расчетов

Приведем решения некоторых примеров по предлагаемой нами методике, разрушающую нагрузку (или схему разрушения) для которых удастся определить еще и аналитическим методом, или для которых имеются соответствующие аналитические и экспериментальные данные других авторов.

4.1.1. Прямоугольная пластина

Рассмотрим пример определения несущей способности прямоугольной в плане плиты с размерами 8×1 , защемленной с обоих концов. Плита загружена сосредоточенной силой в центре тяжести плиты.

Разобьем плиту на 2 жестких диска пополам, так, чтобы точка приложения силы приходилось на линию разрушения между двумя дисками (рис. 4.1.1).

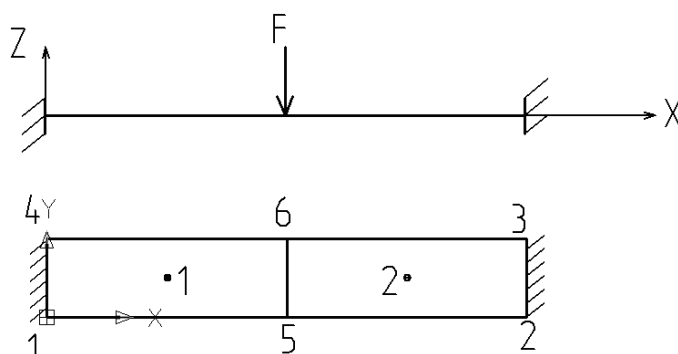


Рис. 4.1.1

Таким образом, получим 3 линии разрушения: 2 жестких защемления и линию, разделяющую диски пополам. В таблице 4.1.1.1 приведены характерные данные для линий разрушения, необходимые для определения коэффициентов соответствующей задачи линейного программирования:

Таблица 4.1.1.1

Линия	Точка O_1	Точка O_2	Длина	Диск А	Диск В	Уг. α в O_1	Уг. α в O_2
1-4	1	4	1	0	1	180°	180°
6-5	6	5	1	1	2	0	0
3-2	3	2	1	0	2	0	0

Для простоты будем использовать безразмерные величины сил и моментов.

Определим несущую способность плиты, учитывая только работу внутренних

изгибающих моментов. Поверхность прочности в этом случае вырождается в отрезок (рис. 4.1.2):

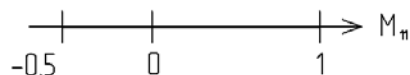


Рис. 4.1.2

В симплекс-метод добавим ограничения, учитывающие невозможность разрывов скоростей в направлении осей z_1 и z_2 : $\Delta v_{13} = 0$; $\Delta v_{23} = 0$ (по условию задачи поперечные силы не совершают работу) для каждой линии разрушения. Таким образом, получим 25 ограничений для задачи линейного программирования. Из них 12 – ограничения вида (3.2.17) для трех линий разрушения. Для начала и конца каждой линии составляются по два ограничения, каждое из которых соответствует точкам на аппроксимирующей поверхности (рис. 4.1.2): $\{M_{11}=-0.5; M_{22}=0; M_{12}=0; T_{11}=0; T_{22}=0; T_{12}=0; Q_{31}=0; Q_{32}=0\}$ и $\{M_{11}=1; M_{22}=0; M_{12}=0; T_{11}=0; T_{22}=0; T_{12}=0; Q_{31}=0; Q_{32}=0\}$. 12 ограничений $\Delta v_{13} = 0$; $\Delta v_{23} = 0$ для начала и конца каждой линии. Кроме того, добавляется ограничение (3.2.11). Количество переменных задачи линейного программирования $2 \cdot 6 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 30$. Здесь $(2 \cdot 6) \cdot 2$ – шесть компонентов скоростей перемещений двух жестких дисков (3 проекции скорости перемещения полюса, 3 проекции скорости поворота вокруг полюса) с учетом коэффициентов с обратными знаками, $3 \cdot 2$ – мощности внутренних силовых факторов на концах трех линий разрушения.

В таблицах 4.1.1.2, 4.1.1.3 приведены результаты решения соответствующей задачи линейного программирования.

Таблица 4.1.1.2

$\min \mu^+ = 0.75$		Итераций = 16				
№ диска	$v_x, \text{ м/с}$	$v_y, \text{ м/с}$	$v_z, \text{ м/с}$	$\omega_x, \text{ с}^{-1}$	$\omega_y, \text{ с}^{-1}$	$\omega_z, \text{ с}^{-1}$
1	0	0	-0.5	0	0.25	0
2	0	0	-0.5	0	-0.25	0

Таблица 4.1.1.3

Скорости диссипации		
№ линии, i	$N_{i1}, \text{ Н/с}$	$N_{i2}, \text{ Н/с}$
1: 1-4	0.25	0.25
2: 6-5	0.25	0.25
3: 3-2	0.25	0.25

Значения μ^+ совпадает с соответствующим результатом аналитического решения рассматриваемой задачи. Результаты численных экспериментов показывают, что порядок нумерации дисков, а также координаты приложения внешней нагрузки на диски не влияют на конечный результат.

Рассмотрим ту же задачу, но с учетом сопротивления сдвигу. Примем сопротивление сдвигу намного меньше, чем сопротивление изгибу. Приведем графическое изображение предельного аппроксимирующего четырехугольника (рис. 4.1.3):

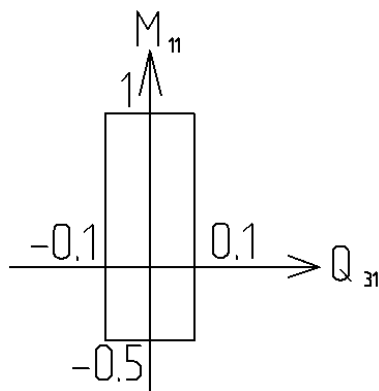


Рис. 4.1.3

В этом случае имеем 25 ограничений задачи линейного программирования, из которых 24 – ограничения вида (3.2.17): по 4 ограничения (соответствуют четырем точкам на аппроксимирующем четырехугольнике) на концах трех линий разрушения, а также ограничение (3.2.11). Количество переменных задачи линейного программирования также 30. Результаты решения соответствующей задачи линейного программирования приведены в таблицах 4.1.1.4, 4.1.1.5.

Таблица 4.1.1.4

$\min \mu^+ = 0.2$		Итераций = 20				
№ диска	v_x , м/с	v_y , м/с	v_z , м/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹
1	0	0	-1	0	0	0
2	0	0	-1	0	0	0

Таблица 4.1.1.5

Скорости диссипации		
№ линии, i	N_{i1} , Н/с	N_{i2} , Н/с
1-4	0.1	0.1
6-5	0	0
3-2	0.1	0.1

Как видно из полученного результата, плита разрушается от среза по линиям 1-4 и 3-2, то есть в защемлении происходит срез (пластического шарнира вдоль центральной линии 6-5 не образуется, повороты обоих дисков отсутствуют).

Рассмотрим теперь случай несимметричного относительно Q_{31} аппроксимирующего четырехугольника (рис 4.1.4). В результате решения задачи линейного программирования, получим следующие результаты (таблицы 4.1.1.6, 4.1.1.7):

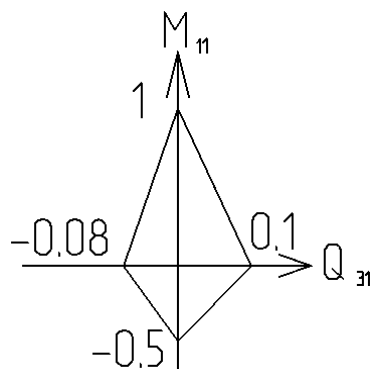


Рис. 4.1.4

Таблица 4.1.1.6

$\min \mu^+ = 0.1742857142857$		Итераций = 20				
№ диска	v_x , м/с	v_y , м/с	v_z , м/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹
1	0	0	-1.14286	0	-0.07143	0
2	0	0	-0.85714	0	-0.07143	0

Таблица 4.1.1.7

Скорости диссипации		
№ линии, i	N_{i1} , Н/с	N_{i2} , Н/с
1-4	0.102857143	0.102857143
6-5	0	0
3-2	0.071428571	0.071428571

Как видно из этих результатов, пластинка разрушается от сдвига, причем с уклоном: диссипация на средней линии 6-5 отсутствует (рис. 4.1.1), скорости поворотов обоих дисков одинаковы (таблица 4.1.1.6). Результаты соответствуют аналитическому решению соответствующей задачи.

Рассмотрим теперь случай, когда сопротивление сдвигу несколько больше, чем раньше. Аппроксимирующий прямоугольник приведен на рис 4.1.5:

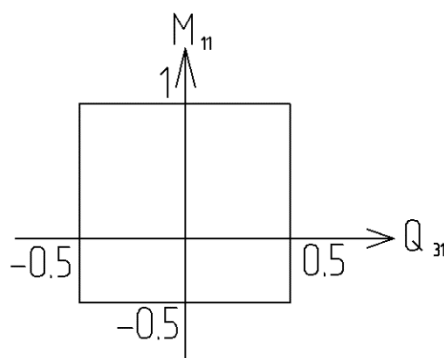


Рис. 4.1.5

В результате решения задачи с использованием нашей методики получены следующие результаты (таблицы 4.1.1.8, 4.1.1.9):

Таблица 4.1.1.8

$\min \mu^+ = 0.75$		Итераций = 14				
№ диска	$v_x, \text{ м/с}$	$v_y, \text{ м/с}$	$v_z, \text{ м/с}$	$\omega_x, \text{ с}^{-1}$	$\omega_y, \text{ с}^{-1}$	$\omega_z, \text{ с}^{-1}$
1	0	0	-0.5	0	0.25	0
2	0	0	-0.5	0	-0.25	0

Таблица 4.1.1.9

Скорости диссипации		
№ линии, i	$N_{i1}, \text{ Н/с}$	$N_{i2}, \text{ Н/с}$
1-4	0.25	0.25
6-5	0.25	0.25
3-2	0.25	0.25

Предельная несущая способность и механизм разрушения совпадают с решением задачи, где учитывается только работа внутренних изгибающих моментов.

Отметим, что приведенные выше задачи решались при помощи программного комплекса, учитывая все неизвестные, применялись все ограничения задачи линейного программирования, не вводилось никаких упрощений и дополнительных условий совместности деформаций, кроме необходимых конструктивных ограничений. Удовлетворительная сопоставимость полученных нами результатов с результатами соответствующих аналитических решений, говорит об отсутствии каких-либо ошибок в ходе реализации алгоритма АЗ.

4.1.2. Получение сечений гиперповерхности прочности

Проведем сравнительный анализ правильности построения сечения гиперповерхности прочности нашим методом. Для этого построим сечения гиперповерх-

ности прочности для однородной металлической пластины толщиной 3 мм. Примем сопротивление стали на растяжение и сжатие в направлениях $0^\circ, 90^\circ$ $\sigma_0 = 210$ МПа, на срез $\sigma_{xy} = \sigma_0/\sqrt{3} = 121.2436$ МПа. Определим, например, сечения гиперповерхности плоскостями $T_{11}OT_{22}$ и $M_{11}OM_{22}$.

Условно разделим всю толщину пластины на три слоя, $h_1=h_2=h_3=0.001$ м. Для каждого слоя запишем уравнение гиперповерхности в форме критерия Мизеса:

$\sigma_{xx}^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_{yy}^2 + 3\sigma_{xy}^2 = \sigma_0^2$. Подставим в это уравнение σ_0 , поделим обе части на σ_0^2 , умножим на 100000, получим:

$$2.26757\sigma_{xx}^2 - 2.26757\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 2.26757\sigma_{yy}^2 + 3*2.26757\sigma_{xy}^2 = 100000(\text{МПа}^2) \quad (4.1.1.1)$$

Теперь, имея коэффициенты уравнения гиперповерхности (4.1.1.1), используя соотношения (2.2.11) можем получить сечения этой гиперповерхности плоскостями $T_{11}OT_{22}$ и $M_{11}OM_{22}$. Для получения сечений применяем алгоритм А1 минимизации и оптимизации целевой функции. На рисунке 4.1.6 приведены полученные сечения плоскостями $T_{11}OT_{22}$, МН/м (а) и $M_{11}OM_{22}$, МН·м/м (б). Кривые симметричны относительно начала координат. Точки 1 и 2 имеют координаты (0.63, 0), (0, 0.63) соответственно (рис. 4.1.6а), а точки 3 и 4 – координаты (0.00047,0), (0, 0.00047) соответственно (рис. 4.1.6б).

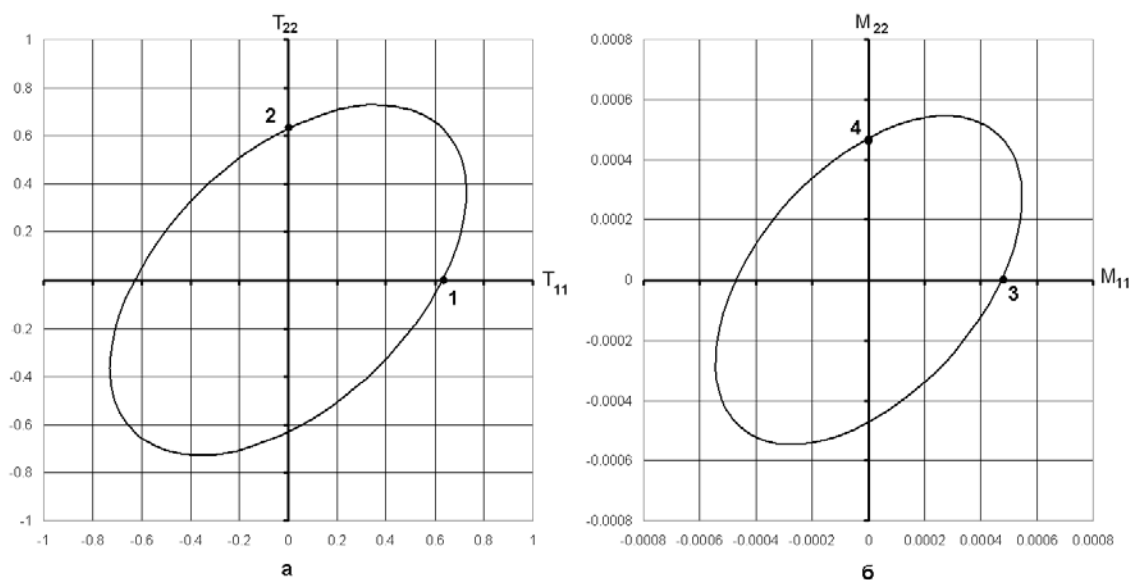


Рис. 4.1.6

Определим аналитическим методом значения для пластины единичной ширины: сопротивление на растяжение-сжатие:

$$\pm T = \pm \sigma_0 h = \pm 210 \cdot 0.003 = \pm 0.63 \text{ кН/м},$$

сопротивление на изгиб:

$$\pm M = \pm \sigma_0 h^2 / 4 = \pm 210 \cdot 0.003^2 / 4 = \pm 0.00047 \text{ кН} \cdot \text{м/м}.$$

Как видно, результаты, полученные аналитическим методом и результаты, полученные с использованием предложенного способа получения сечений гиперповерхности текучести, совпадают.

4.1.3. Круглая пластина и сферическая оболочка с малой стрелой подъема

Приведем пример определения несущей способности стальной круглой шарнирно опертой по контуру пластины и сферической оболочки с малой стрелой подъема. Диаметр контура 1 м, материал – как в пункте 4.1.2, разбиение на жесткие диски – как показано на рис. 4.1.7. Пластина загружена в центре (жесткий элемент №5) сосредоточенной силой, направленной против оси Z.

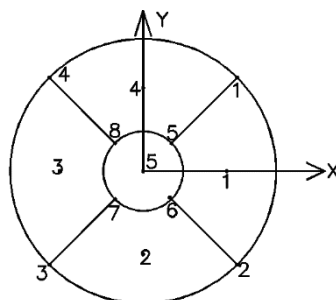


Рис. 4.1.7

Для решения задачи линейного программирования составляется $12 \cdot (24 + 24) + 1 = 577$ ограничений (12 линий разрушения, 24 аппроксимирующие точки на гиперповерхности прочности для концов линии разрушения – 567 ограничений вида (3.2.17), одно ограничение вида (3.2.11)). Количество неизвестных задачи $5 \cdot 6 \cdot 2 + 12 \cdot 2 = 84$ (5 жестких элементов имеют 6 степеней свободы; мощности, развиваемые на концах 12 обобщенных линий разрушения).

В таблицах 4.1.3.1-4.1.3.2 приведены результаты решения задачи линейного программирования.

Таблица 4.1.3.1

min $\mu^+=0.0028618756094$						
№ диска	$v_x, \text{ м/с}$	$v_y, \text{ м/с}$	$v_z, \text{ м/с}$	$\omega_x, \text{ с}^{-1}$	$\omega_y, \text{ с}^{-1}$	$\omega_z, \text{ с}^{-1}$
1	0	0	-0.15855	0	-4.038	0
2	0	0	-0.15855	-4.038	0	0
3	0	0	-0.15855	0	4.038	0
4	0	0	-0.15855	4.038	0	0
5	0	0	-1	0	0	0

Таблица 4.1.3.2

Скорости диссипации		
№ линии, i	$N_{i1}, \text{ Н/с}$	$N_{i2}, \text{ Н/с}$
1: 1-2	0	0
2: 2-3	0	0
3: 3-4	0	0
4: 4-1	0	0
5: 6-5	0.00020237	0.00020237
6: 7-6	0.00020237	0.00020237
7: 8-7	0.00020237	0.00020237
8: 5-8	0.00020237	0.00020237
9: 5-1	0.001907962	0.001907962
10: 2-6	0.001907962	0.001907962
11: 3-7	0.001907962	0.001907962
12: 4-8	0.001907962	0.001907962

Итак, нами получено предельное значение разрушающей нагрузки, равное 0.00286 мН. Предельная разрушающая нагрузка для аналогичной пластины, полученная в [79], составляет 0.00297 мН (разница составляет 3.6%).

При увеличении стрелы подъема от нуля до 5 см, получим предельную нагрузку, равную 0.19214 мН, и практически идентичную картину разрушения по скоростям перемещений и поворотов (таблицы 4.1.3.3-4.1.3.4):

Таблица 4.1.3.3

min $\mu^+=0.19213984360034$						
№ диска	$v_x, \text{ м/с}$	$v_y, \text{ м/с}$	$v_z, \text{ м/с}$	$\omega_x, \text{ с}^{-1}$	$\omega_y, \text{ с}^{-1}$	$\omega_z, \text{ с}^{-1}$
1	-0.08827	0	-0.114141	0	-2.90705	0
2	0	0.08827	-0.114141	-2.90705	0	0
3	0.08827	0	-0.114141	0	2.90705	0
4	0	-0.08827	-0.114141	2.90705	0	0
5	0	0	-1	0	0	0

Таблица 4.1.3.4

Скорости диссипации		
№ линии, i	N_{i1}	N_{i2}

1: 1-2	0	0
2: 2-3	0	0
3: 3-4	0	0
4: 4-1	0	0
5: 6-5	0.099838332	0.099838332
6: 7-6	0.099838332	0.099838332
7: 8-7	0.099838332	0.099838332
8: 5-8	0.099838332	0.099838332
9: 5-1	0.149819908	0.002201075
10: 2-6	0.002201075	0.149819908
11: 3-7	0.002201075	0.149819908
12: 4-8	0.002201075	0.149819908

Эпюры скоростей диссипации для случая плоской пластины (а) и с пластины со стрелой подъема 5 см (б) приведены на рис. 4.1.8.

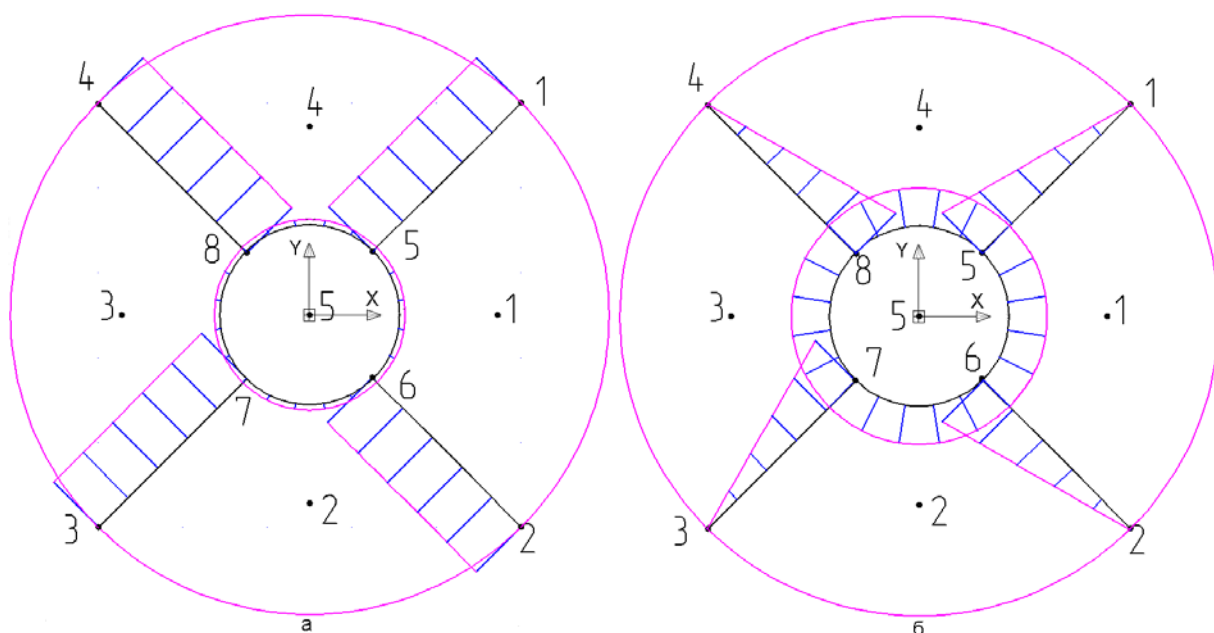


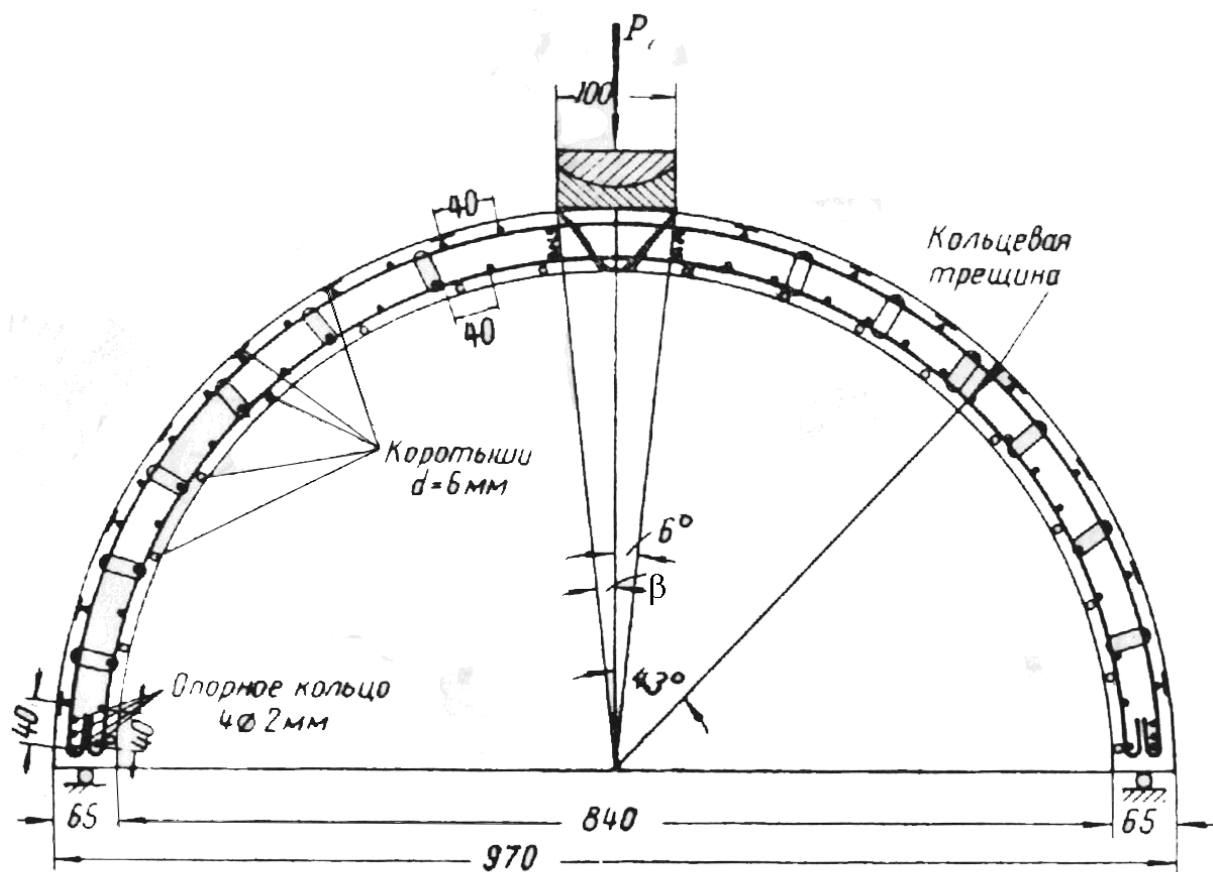
Рис. 4.1.8

Полученная разница в 3.6% между нашим и аналитическим решениями говорит о достоверности получаемых с помощью нашей методики результатов. Из рисунков 4.1.8а и 4.1.8б можно отметить изменение характера распределения скоростей диссипации. Если для пластины большие скорости диссипации свойственны для радиальных линий разрушения, то при появлении стрелы подъема, скорости диссипации для линий у центрального диска (линии 6-5, 7-9, 8-7, 5-8 на рис. 4.1.8) выравниваются со скоростями в соответствующих точках радиальных линий (линии 5-1, 2-6, 3-7, 4-8 на рис. 4.1.8). Конструкция более эффективно сопротивляется нагрузке рассматриваемого вида.

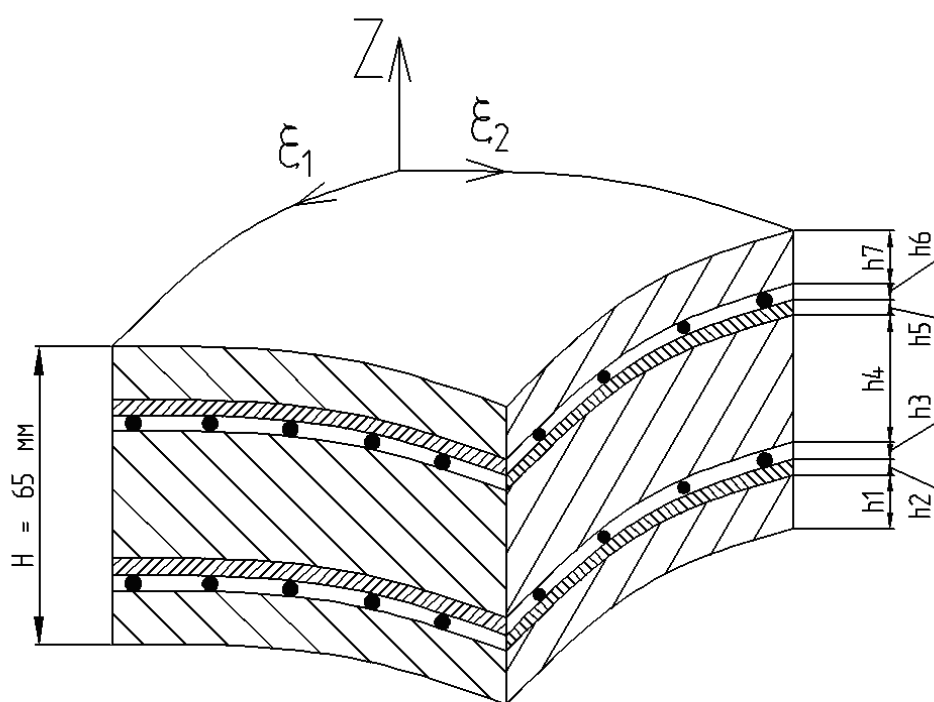
Следует отметить, что рассматриваемые задачи решались без предварительного учета их осесимметричного характера. Полученные результаты хорошо описывают эту осесимметричность (в пределах принятой расчетной модели).

4.1.4. Определение несущей способности полусферического купола

Рассмотрим предельное состояние купола, экспериментальные данные для которого приведены в книге [63]. Армирование купола (рис. 4.1.9а) состоит из наружной и внутренней кольцевой арматуры диаметром 1.95 мм из отожженной проволоки, уложенной спиралью с шагом 40 мм. Предел прочности при растяжении σ_{ut} проволоки равен 3950 кг/см², предельное удлинение ε_{ut} равно 13 – 16 %. Меридиональная арматура состоит из 2×16 диаметром 1.95 мм, тоже из отожженной проволоки. Двенадцать прутков меридиональной арматуры по каждой поверхности обрываются, не доходя 50 мм до вершины купола, а два стержня пропущены целиком через весь купол, пересекаясь в его вершине, образуя здесь четыре прутка меридиональной арматуры. В опорном кольце уложены три витка из одной нити диаметром 2 мм из неотожженной проволоки у наружной поверхности купола и один виток – у внутренней поверхности. Для неотожженной проволоки $\sigma_{ut} = 8600$ кг/см², $\varepsilon_{ut} = 0.8 – 0.9$ %. К арматурному каркасу прикреплены сверху и снизу коротыши диаметром 6 мм, которые обеспечивали надлежащее положение каркасу между опалубками, сохранение защитного слоя бетона. Купол нагружался вертикальной силой, передающейся через шаровую опору диаметром 10 см. Направление оси ξ_1 совпадает с меридианом, оси ξ_2 – с параллелью оболочки. Условно будем считать, что оболочка состоит из семи совместно работающих слоев (рис 4.1.9б). Толщины этих слоев: $h_1 = h_7 = 6$ мм; $h_2 = h_3 = h_5 = h_6 = 2$ мм; $h_4 = 45$ мм. Углы ориентации слоев: $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_7 = 0^\circ$; $\varphi_3 = \varphi_6 = 90^\circ$. Диаметр срединной поверхности S_0 оболочки равен 905 мм.



a



б

Рис. 4.1.9

Используя прочностные характеристики бетона и арматуры, ниже получены

уравнения гиперповерхности прочности для бесконечно малых элементов слоев для $\beta = 6^\circ$, $\beta = 43^\circ$ и $\beta = 90^\circ$ от вертикально оси купола (пример П1).

Используя формулы, приведенные в книге В.Н. Байкова, Э.Е. Сигалова [9], определим прочностные характеристики бетона. Призменная прочность при сжатии

$$R_{c(20)} = 0.75R_k = 0.75 \cdot 32 \cdot 0.98 = 23.6 \text{ МПа};$$

$$R_{c(15)} = R_c = R_{c(20)} / 0.93 = 25.3 \text{ МПа}.$$

Временное сопротивление бетона осевому растяжению можно определить по эмпирической формуле

$$R_t = 0.233 \sqrt[3]{R_k^2}, \quad (4.1.4.1)$$

а временное сопротивление на срез – по формуле

$$R_s = 2R_t. \quad (4.1.4.2)$$

Вследствие неоднородности структуры бетона формула (4.1.4.1) не всегда дает правильные значения R_t . Более точное значение R_t определяют испытаниями на разрыв образцов в виде восьмерки. Значение прочности $R_c = 25.3$ МПа примерно соответствует классу бетона В 45. Для этого бетона $R_t = 1.45$ МПа (что меньше значения, вычисляемого по формуле (4.1.4.1)), а временное сопротивление на срез $R_s = 2.9$ МПа.

Уравнение предельной поверхности прочности для бетона запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + (R_c - R_t)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \\ &+ \frac{R_c}{4R_t}(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = R_c R_t. \end{aligned} \quad (4.1.4.3)$$

При записи этого уравнения мы опирались на условие прочности, приведенное в книге Г.А. Гениева, В.Н. Киссюка, Г.А. Тюпина [18, с. 20]. В рассматриваемом случае уравнение (4.1.4.3) имеет вид

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 23.85(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \\ &+ 4.36(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 36.68 \quad (\text{МПа}^2). \end{aligned} \quad (4.1.4.4)$$

Определим прочности армированных слоев. Прочность проволоки на разрыв

$\sigma_p = 395 \cdot 0.98 = 387$ МПа. Такой же прием прочность проволоки на сжатие (возможности потери устойчивости не рассматриваем). Прочность проволоки на срез $\sigma_{xy}^u = 0.5 \sigma_p = 194$ МПа. Площадь сечения проволоки диаметром 1.95 мм равна 2.986 мм².

Рассмотрим слои, армированные в направлении параллелей сферы (слои №3 и №6 на рис. 4.1.9б). Одна проволока диаметром 1.95 мм приходится на ширину слоя в 40 мм. Коэффициент армирования слоев №3 и №6:

$$\mu_3 = \mu_6 = \frac{2.986 \cdot 100\%}{80} = 3.7325\%.$$

Используя правило смесей, найдем прочность слоя на растяжение в направлении армирования:

$$\sigma_{xx}^{ur} = \frac{387 \cdot 3.7325}{100} + \frac{1.45 \cdot 96.3}{100} = 14.44 + 1.4 = 15.84 \text{ МПа}.$$

Прочность слоя на сжатие в направлении армирования:

$$\sigma_{xx}^{uc} = -\left(\frac{387 \cdot 3.7325}{100} + \frac{25.3 \cdot 96.3}{100}\right) = -(14.44 + 24.36) = -38.8 \text{ МПа}.$$

Прочности слоя на растяжение и сжатие поперек арматуры примем равными соответствующим прочностям бетона:

$$\sigma_{yy}^{ur} = 1.45 \text{ МПа}; \quad \sigma_{yy}^{uc} = -25.3 \text{ МПа}.$$

Определим временное сопротивление армированного слоя на срез:

по Фойхту

$$\sigma_{xy}^u(F) = \frac{194 \cdot 3.7325}{100} + \frac{2.9 \cdot 96.3}{100} = 7.24 + 2.79 = 10.03 \text{ МПа};$$

по Рейссу

$$\frac{1}{\sigma_{xy}^u(R)} = \frac{3.7325}{194} + \frac{96.3}{2.9} = 0.0192 + 33.2 = 33.226;$$

$$\sigma_{xy}^u(R) = 100/33.226 = 3.01 \text{ МПа};$$

примем

$$\sigma_{xy}^u = \sigma_{xy}^u(R) = 3.01 \text{ МПа}.$$

Используя найденные выше значения прочностных характеристик для слоев №3 и №6, армированных вдоль параллелей (рис. 4.1.9б), уравнение поверхности прочности для монослоя запишем в следующем виде:

$$16.27\sigma_{xx}^2 - 0.9808\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 272.6\sigma_{yy}^2 + 373.4\sigma_{xx} + 6501\sigma_{yy} + 1104(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 10000 \quad (МПа^2). \quad (4.1.4.5)$$

Около опоры с наружной стороны добавлено три витка неотожженной проволоки диаметром 2 мм, с внутренней стороны – один виток такой же проволоки (в направлении параллели оболочки). Найдем характеристики прочности этих слоев. Прочности арматуры на растяжение и на сжатие соответственно:

$$\sigma_{xx}^{ut} = 842.8 \text{ МПа}; \quad \sigma_{xx}^{uc} = -842.8 \text{ МПа}.$$

Прочность арматуры на срез:

$$\sigma_{xy}^u = 421.4 \text{ МПа}.$$

Найдем характеристики слоя у опоры с наружной стороны оболочки (слой №6 на рис. 4.1.9б). Коэффициент армирования

$$\mu_6 = \frac{3 \cdot 3.14159}{80} \cdot 100\% = 11.78\%.$$

Прочность на растяжение слоя №6 в направлении армирования:

$$\sigma_{xx}^{ut} = \frac{842.8 \cdot 11.78}{100} + \frac{1.45 \cdot 88.22}{100} = 99.28 + 1.28 = 100.56 \text{ МПа}.$$

Прочность слоя №6 у опоры на сжатие в направлении армирования:

$$\sigma_{xx}^{uc} = -\left(99.28 + \frac{25.3 \cdot 88.22}{100}\right) = -(99.28 + 22.32) = -121.6 \text{ МПа}.$$

Прочность слоя №6 у опоры на растяжение поперек арматуры

$$\sigma_{yy}^{ut} = 1.45 \text{ МПа}.$$

Прочность слоя №6 у опоры на сжатие поперек арматуры:

$$\frac{100}{\sigma_{yy}^{uc}} = -\left(\frac{11.78}{842.8} + \frac{88.22}{25.3}\right) = -3.5;$$

$$\sigma_{yy}^{uc} = -100/3.5 = -28.56 \text{ МПа}.$$

Прочность слоя №6 у опоры на срез:

$$\frac{100}{\sigma_{xy}^u} = \frac{11.78}{421.4} + \frac{88.22}{2.9} = 0.028 + 30.421 = 30.45;$$

$$\sigma_{xy}^u = 100/30.45 = 3.28 \text{ МПа}.$$

Используя найденные значения прочностных характеристик, для монослоя №6 у опоры (армированной вдоль параллели оболочки) уравнение поверхности прочности запишем в следующем виде:

$$0.8178\sigma_{xx}^2 - 3.714\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 241.5\sigma_{yy}^2 + 17.21\sigma_{xx} + 6546\sigma_{yy} + 929.5(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 10000 \quad (\text{МПа}^2). \quad (4.1.4.6)$$

Найдем прочностные характеристики слоя №3 у опоры. Коэффициент армирования этого слоя

$$\mu_3 = \frac{3.14159}{80} \cdot 100\% = 3.93\%.$$

Прочность слоя №3 на растяжение в направлении армирования:

$$\sigma_{xx}^{ut} = \frac{842.8 \cdot 3.93}{100} + \frac{1.45 \cdot 96.07}{100} = 33.122 + 1.393 = 34.515 \text{ МПа}.$$

Прочность слоя №3 у опоры на сжатие в направлении армирования:

$$\sigma_{xx}^{uc} = -\left(33.122 + \frac{25.3 \cdot 96.07}{100}\right) = -(33.122 + 24.305) = -57.43 \text{ МПа}.$$

Прочность слоя №3 у опоры на сжатие поперек арматуры:

$$\frac{100}{\sigma_{yy}^{uc}} = -\left(\frac{3.93}{842.8} + \frac{96.07}{25.3}\right) = -(4.663 \cdot 10^{-3} + 3.797) = -3.802;$$

$$\sigma_{yy}^{uc} = -100/3.802 = -26.3 \text{ МПа}.$$

Прочность слоя №3 у опоры на растяжение поперек арматуры возьмем равной прочности бетона на растяжение:

$$\sigma_{yy}^{ut} = 1.45 \text{ МПа}.$$

Прочность слоя №3 у опоры на срез:

$$\frac{100}{\sigma_{xy}^u} = \frac{3.93}{421.4} + \frac{96.07}{2.9} = 33.137;$$

$$\sigma_{xy}^u = 100/33.137 = 3.018 \text{ МПа}.$$

Используя найденные выше значения прочностных характеристик, для слоя №3 у опоры, армированной вдоль параллели оболочки, уравнение поверхности прочности запишем в следующем виде:

$$5.045\sigma_{xx}^2 - 15.66\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 262.2\sigma_{yy}^2 + 115.6\sigma_{xx} + 6516\sigma_{yy} + 1098(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 10000 \quad (\text{МПа}^2). \quad (4.1.4.7)$$

Определим прочностные характеристики армированных в направлении меридиана оболочки слоев (слои №2 и №5 на рис. 4.1.9б). Коэффициент армирования этих слоев меняется в зависимости от угла β (рис. 4.1.9а). При $0 < \beta \leq 6^\circ$ имеем:

$$\mu_2 = \mu_5 = \frac{2.986}{\pi R_0 \sin \beta} \cdot 100\% = \frac{0.21}{\sin \beta} \%.$$

Отметим, что $\mu \leq 100\%$. Здесь R_0 – радиус срединной поверхности оболочки.

При $6^\circ < \beta \leq 90^\circ$:

$$\mu_2 = \mu_5 = \frac{0.84}{\sin \beta} \%.$$

Прочность слоев №2 и №5 на растяжение в направлении армирования:

$$\sigma_{xx}^{ut} = \frac{842.8}{100} \cdot \frac{0.84}{\sin \beta} + \frac{1.45}{100} \left(100 - \frac{0.84}{\sin \beta} \right) = 1.45 + \frac{6.9678}{\sin \beta}. \quad (4.1.4.8)$$

Прочность этих же слоев на сжатие в направлении армирования:

$$\sigma_{xx}^{uc} = - \left[\frac{7.08}{\sin \beta} + \frac{25.3}{100} \left(100 - \frac{0.84}{\sin \beta} \right) \right] = - \left(25.3 + \frac{6.7674}{\sin \beta} \right). \quad (4.1.4.9)$$

Прочность слоев №2 и №5 на растяжение и сжатие поперек направления армирования, а так же их прочность на срез примем равными соответствующим прочностям бетона:

$$\sigma_{yy}^{ut} = 1.45 \text{ МПа}; \quad \sigma_{yy}^{uc} = -25.3 \text{ МПа}; \quad \sigma_{xy}^u = 2.9 \text{ МПа}.$$

Используя найденные выше прочностные характеристики, для слоев №2 и №5, армированных вдоль меридианов оболочки, уравнения поверхностей прочности запишем для некоторых значений угла β . Имеем:

при $\beta = 6^\circ$

$$1.591\sigma_{xx}^2 - 10.29\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 272.6\sigma_{yy}^2 + 34.89\sigma_{xx} + \\ + 6501\sigma_{yy} + 1189(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 10000 \quad (МПа^2); \quad (4.1.4.10)$$

при $\beta = 43^\circ$

$$23.94\sigma_{xx}^2 - 55.87\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 272.6\sigma_{yy}^2 + 564\sigma_{xx} + \\ + 6500\sigma_{yy} + 1189(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 10000 \quad (МПа^2); \quad (4.1.4.11)$$

при $\beta = 90^\circ$

$$36.48\sigma_{xx}^2 - 191.5\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 272.6\sigma_{yy}^2 + 862.8\sigma_{xx} + \\ + 6501\sigma_{yy} + 1189(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 10000 \quad (МПа^2). \quad (4.1.4.12)$$

На рис. 4.1.10 приведены сечения гиперповерхности прочности, для $\beta=6^\circ$, плоскостью $T_{11}OT_{22}$, полученные до (штриховая линия) и после (сплошная линия) оптимизации целевой функции (2.3.2) (на этом рисунке $t_{11} = \frac{T_{11}}{T_*}$, $t_{22} = \frac{T_{22}}{T_*}$, $T_* = \sigma_* h$, $\sigma_* = 23.5$ МПа) с использованием алгоритма А1. В таблице 4.1.4.1 приведены значения целевой функции g (2.3.2), а также значения «невязок» $\delta=g/g^* \cdot 100\%$. Здесь g^* – значение целевой функции до ее минимизации (соответствующие значения T_{11} и T_{22} определяются из соотношений 2.2.11, где $\dot{e}_3 = \dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha}_3 = \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = 0$; $\dot{e}_1 = \cos(\alpha)$, $\dot{e}_2 = \sin(\alpha)$, $\alpha = \overline{0, 2\pi}$); g – значение целевой функции после ее минимизации тем или иным способом (g' или g''): g' (после минимизации) – после решения нелинейных уравнений (2.3.1) методом наискорейшего спуска [108]; g'' (после «оптимизации») – после решения системы (2.3.1) с использованием предлагаемого алгоритма А1.

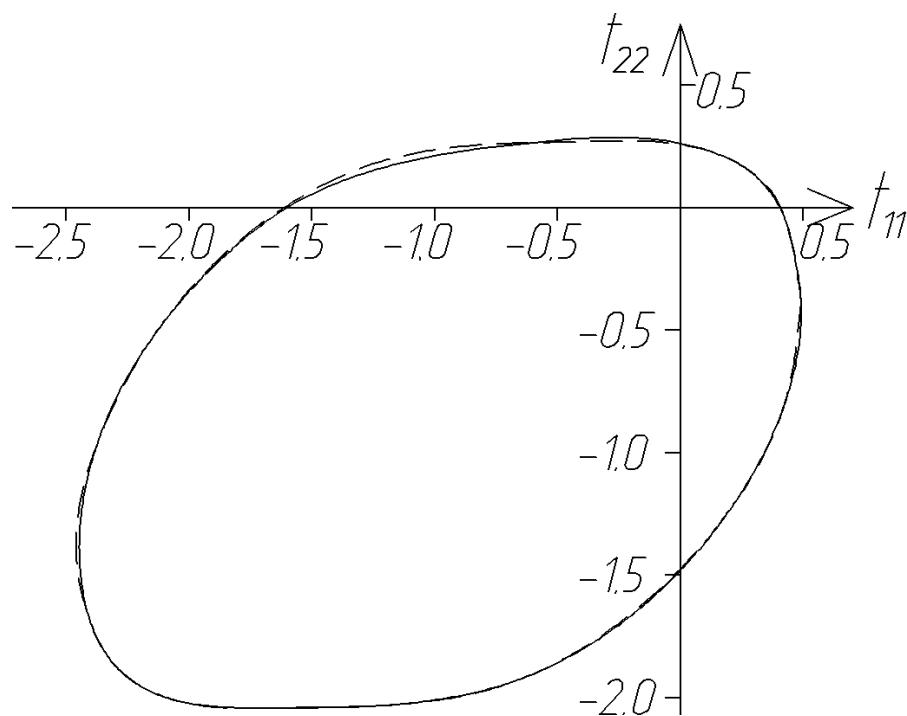


Рис. 4.1.10

Таблица 4.1.4.1

№ точки	g^* до минимизации	g' после минимизации	% невязки	g'' после «оптимизации»	% невязки
1	0.000485128	0.000401585	82.7792%	4.88E-18	0.00000%
2	0.000461988	0.000413844	89.57896%	2.05E-21	0.00000%
3	0.000504517	1.27E-13	0.00000%	1.25E-12	0.00000%
4	0.000521039	4.33E-10	0.00008%	1.68E-19	0.00000%
5	0.000524387	2.46E-13	0.00000%	3.75E-18	0.00000%
6	0.000499052	3.35E-06	0.67125%	3.35E-06	0.67044%
7	4.72E-05	4.1653E-05	88.1805%	7.56E-08	0.18158%
8	0.001161596	7.47E-08	0.00643%	3.73E-08	0.00321%
9	0.001217818	2.69E-13	0.00000%	7.68E-19	0.00000%
10	0.001214699	1.76E-11	0.00000%	1.90E-19	0.00000%
11	0.001191063	0.000672311	56.44631%	7.99E-17	0.00000%
12	0.00117264	0.001130738	96.4267%	1.14E-18	0.00000%
13	0.001040812	8.49E-08	0.00816%	3.57E-21	0.00000%
14	0.001113317	2.25E-16	0.00000%	4.27E-24	0.00000%
15	0.001168507	7.84E-11	0.00001%	1.74E-21	0.00000%
16	0.001191184	1.87E-13	0.00000%	3.20E-22	0.00000%
17	0.00119593	9.39E-07	0.07856%	1.78E-08	0.00149%
18	0.001157821	6.49E-06	0.56081%	2.37E-09	0.00020%
19	0.000207516	0.000104635	50.42260%	2.32E-17	0.00000%
20	0.000498674	1.46E-12	0.00000%	2.50E-17	0.00000%

Эти результаты получены для бесконечно малого элемента оболочки, расположенного у параллели с координатой $\beta=6^\circ$, отсчитываемой от вертикальной оси купола. Как видно из таблицы 4.1.4.1, достигнуто существенное уточнение искомого сечения гиперповерхности.

Аналогичным образом, построим уточненные сечения гиперповерхностей прочности пакета слоев плоскостями $T_{11}OT_{22}$, $M_{11}OM_{22}$ и $Q_{31}OQ_{32}$ для бесконечно малых элементов, расположенных у параллелей оболочки с углами $\beta = 6^\circ$, $\beta = 43^\circ$ и $\beta = 90^\circ$, отсчитываемыми от вертикальной оси купола. Отметим, что гиперповерхность в каждой точке конструкции аппроксимируем многогранником с 36-ю вершинами (по 12 точек на каждом сечении $T_{11}OT_{22}$, $M_{11}OM_{22}$ и $Q_{31}OQ_{32}$). На рис. 4.1.11-4.1.13 приведены сечения гиперповерхностей прочности для бесконечно малых элементов купола при $\beta = 6^\circ$, $\beta = 43^\circ$ и $\beta = 90^\circ$ от вертикальной оси купола соответственно. Здесь (а) – сечение гиперповерхности плоскостью $T_{11}OT_{22}$, МН/м; (б) – сечение гиперповерхности плоскостью $M_{11}OM_{22}$, кН·м/м; (в) – сечение гиперповерхности плоскостью $Q_{31}OQ_{32}$, МН/м.

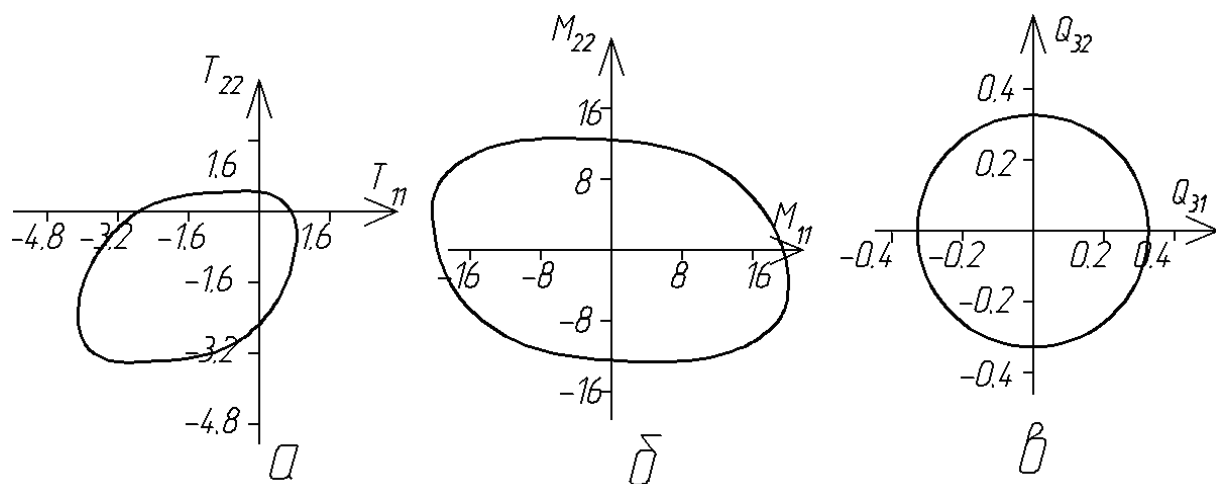


Рис. 4.1.11

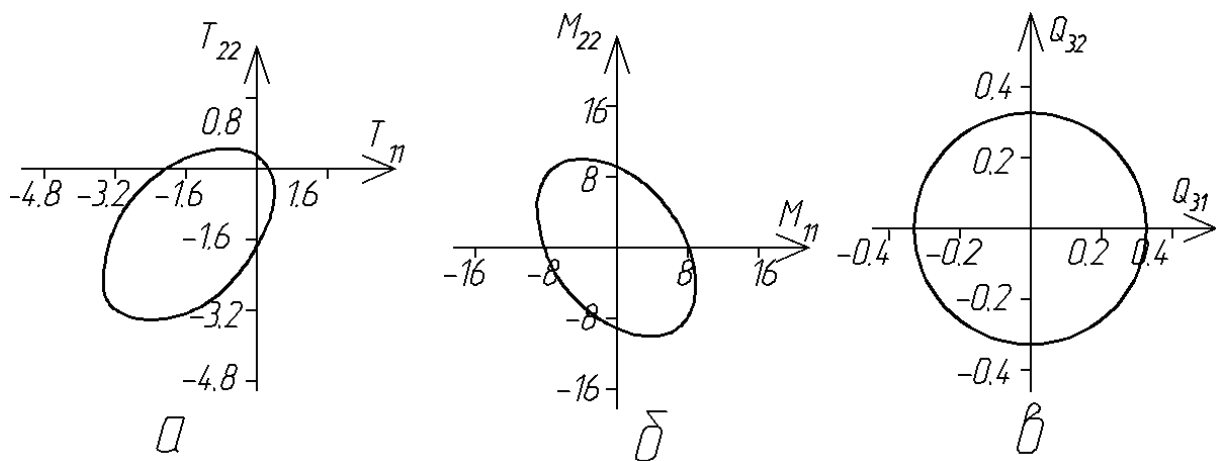


Рис. 4.1.12

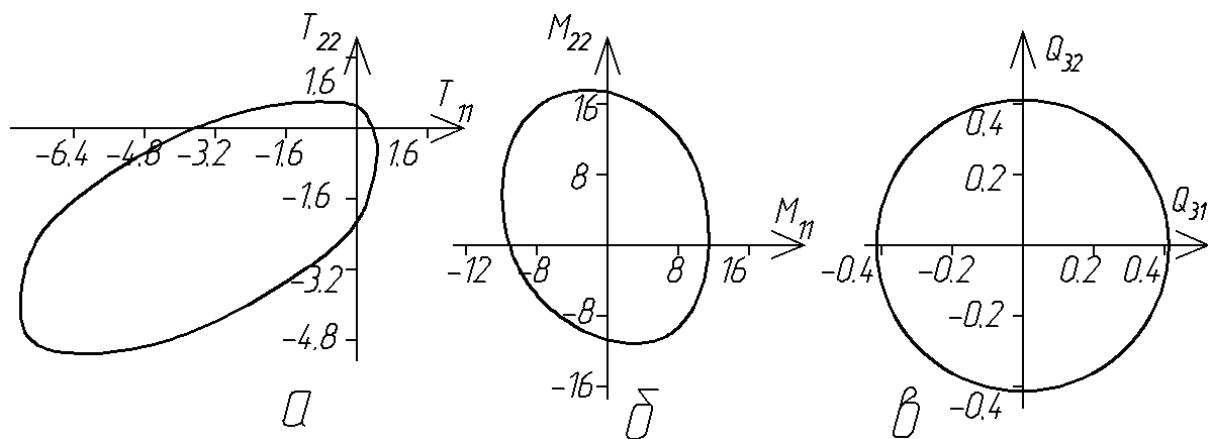


Рис. 4.1.13

Примем разбиение на жесткие диски (рис. 4.1.14б) согласно экспериментальных данных [63] о механизме разрушения такой полусферической оболочки (рис. 4.1.14а).

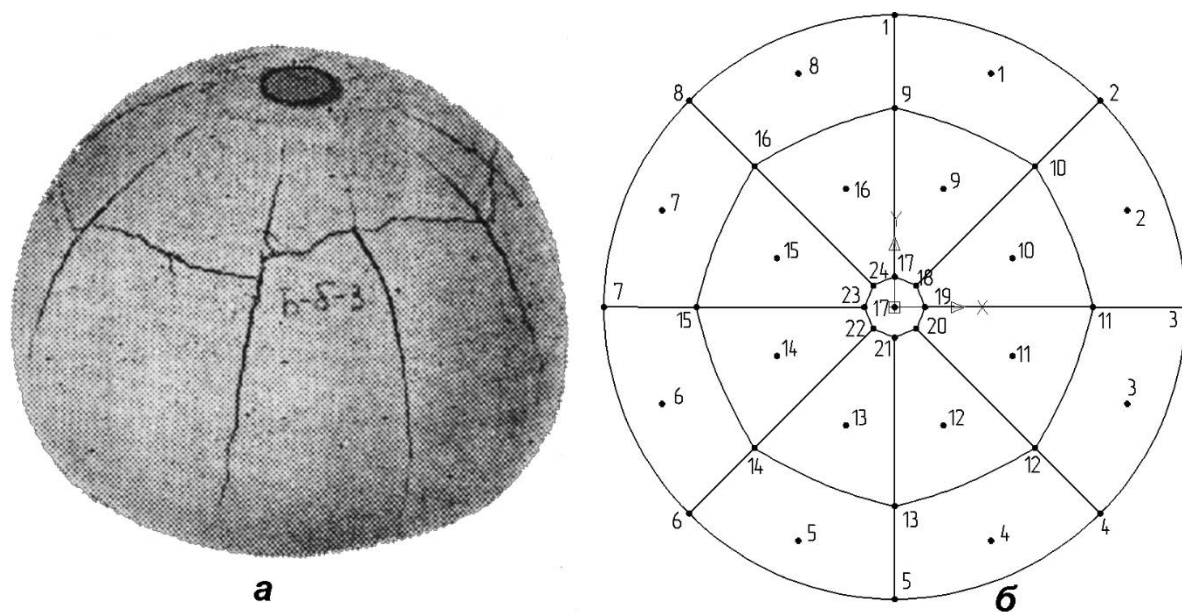


Рис. 4.1.14

В этом случае, соответствующая таблица исходных данных для вычисления коэффициентов задачи линейного программирования, будет выглядеть следующим образом (таблицы 4.1.4.2 и 4.1.4.3). Параметры линий разрушения:

Таблица 4.1.4.2

1	2	3	4	5	6	7	8
№ линии	Точка O_1	Точка O_2	Диск А	Диск В	Длина, м	α в O_1 , рад	α в O_2 , рад
1	1	2	1	0	0.35539	0	0
2	2	3	2	0	0.35539	0	0
3	3	4	3	0	0.35539	0	0
4	4	5	4	0	0.35539	0	0
...							

...							
38	14	22	14	13	0.29221	-1.5708	-1.5708
39	15	23	15	14	0.29221	-1.5708	-1.5708
40	16	24	16	15	0.29221	-1.5708	-1.5708

Проекции главных вектора и момента на глобальные оси XYZ (изменяющиеся пропорционально монотонно возрастающему параметру – времени):

Таблица 4.1.4.3

Диск, i	F_x^{0i} МН	F_y^{0i} МН	F_z^{0i} МН	M_x^{0i} , МН·м	M_y^{0i} , МН·м	M_z^{0i} , МН·м
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
...						
...						
17	0	0	-1	0	0	0

Проекция $F_z^{017} = -1$ означает вертикальную сосредоточенную нагрузку, приложенную к полюсу жесткого элемента (моменты равны нулю). Все диски, кроме №17 свободны от нагрузки.

Определим коэффициенты для задачи линейного программирования (ЛП). Количество ограничений задачи ЛП можно определить согласно разделу 3.3.2. В нашем случае количество неизвестных равно $17 \cdot 6 \cdot 2 + 40 \cdot 2 = 284$, количество ограничений равно $40 \cdot (36 + 36) + 1 = 2881$. Затем, согласно разделу 3.3.2, определим все коэффициенты для каждого ограничения задачи ЛП.

В результате решения задачи ЛП, получили оценку разрушающей нагрузки, равную 13.078 т. Соответствующая экспериментальная разрушающая нагрузка приведена в [63], она равна 13 т. Разница между теорией и экспериментом составляет 0.6%.

4.1.5. Определение несущей способности цилиндрической оболочки

Рассмотрим определение несущей способности цилиндрической оболочки. Схематичное изображение приведено на рис. 4.1.15. Оболочка разбита на семь жестких дисков, по 12-ти линиям разрушения. Диски 6 и 7 – диафрагмы жесткости. Оболочка шарнирно оперта по сторонам 1-2 и 3-4, закрыта жесткими диафрагмами по сторонам 1-4 и 2-3 (которые не опираются на неподвижные опоры).

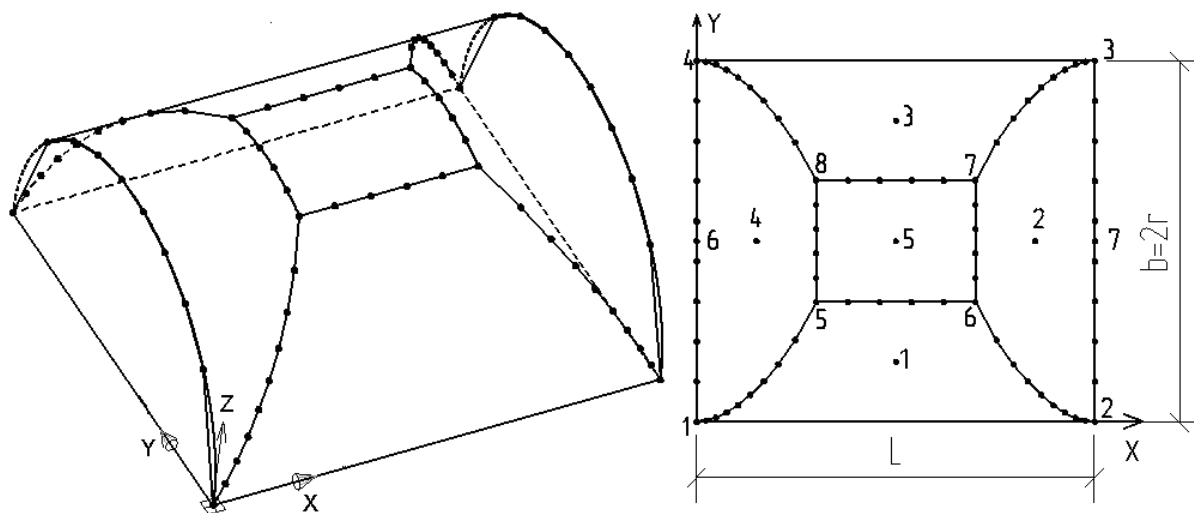


Рис. 4.1.15

В таблице 4.1.5.1 приведены данные, необходимые для определения коэффициентов задачи линейного программирования. Столбцы 2 – 5 вычисляются согласно пунктам 1 – 7 алгоритма А3. Длины линий разрушения определяются с использованием алгоритма А4. Углы α равны углам между осями ξ_1 и y_2 в точках O_1 и O_2 (ось ξ_1 совпадает с касательной к оболочке, параллельной оси OY). Здесь $L=1$ м, $b=0.95$ м.

Таблица 4.1.5.1

№ линии	Точка O_1	Точка O_2	Диск А	Диск В	Длина, м	α в O_1 , рад	α в O_2 , рад
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	1	1	0	1	3.14159	3.14159
2	3	2	2	7	1.40752	1.5707963	1.570796
3	4	3	3	0	1	0	0
4	1	4	4	6	1.40752	-1.570796	-1.570796
5	5	6	1	5	0.4	0	0
6	6	7	2	5	0.37229	-1.570796	-1.570796
7	7	8	3	5	0.4	3.14159	3.14159
8	8	5	4	5	0.37229	1.570796	1.570796
9	1	5	1	4	0.60406	-1.099066	-1.065805
10	6	2	1	2	0.60406	1.084358	1.07843
11	7	3	2	3	0.60406	-1.084358	-1.07843
12	8	4	3	4	0.60406	-2.05723	-2.063158

Оболочка нагружена равномерно распределенной вертикальной нагрузкой (жесткие диски 1 – 5). Согласно алгоритма А5 получим проекции главного вектора и главного момента внешней нагрузки относительно полюса для каждого из дисков 1 – 5. Тем самым получим коэффициенты для условия (3.2.11). Эти коэффициенты приведены в таблице 4.1.5.2.

Таблица 4.1.5.2

Диск, i	F_x^{0i}	F_y^{0i}	F_z^{0i}	M_x^{0i}	M_y^{0i}	M_z^{0i}
1	0	0	-0.16620771	0.003153661	-0.000154975	0
2	0	0	-0.21551323	$2.54788 \cdot 10^{-17}$	0.004071449	0
3	0	0	-0.1656898	-0.0031532	$-3.73508 \cdot 10^{-17}$	0
4	0	0	-0.21481617	-0.00023849	-0.004089989	0
5	0	0	-0.1448	$4.22839 \cdot 10^{-18}$	$-2.54788 \cdot 10^{-18}$	0

Сравнительно небольшие значения моментов объясняются тем, что полюса дисков выбраны близко к центрам тяжести проекций контуров жестких дисков на плоскость XOY . Так, например, проекция контура диска 5 на эту плоскость представляет прямоугольник, проекция полюса диска 5 совпадает с проекцией центра тяжести диска, соответствующие моменты получились близкими к нулю.

Толщина оболочки 3 мм, прочность на растяжение – R_t , а на сжатие – R_c . Определим, по аналогии с примером П1, коэффициенты уравнения гиперповерхности прочности для материала этой оболочки при $R_t/R_c = 0.5$ ($R_t = 105$ МПа):

$$3.4722\sigma_{xx}^2 - 0.7957\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3.4722\sigma_{yy}^2 + 208.333\sigma_{xx} + 208.333\sigma_{yy} + 208.333(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 100000 \quad (\text{МПа}^2).$$

На рис 4.1.16 приведены сечения гиперповерхности прочности для однородной оболочки некоторыми координатными плоскостями, построенные по нашей методике. Здесь силы в МН/м; моменты – в кН·м/м.

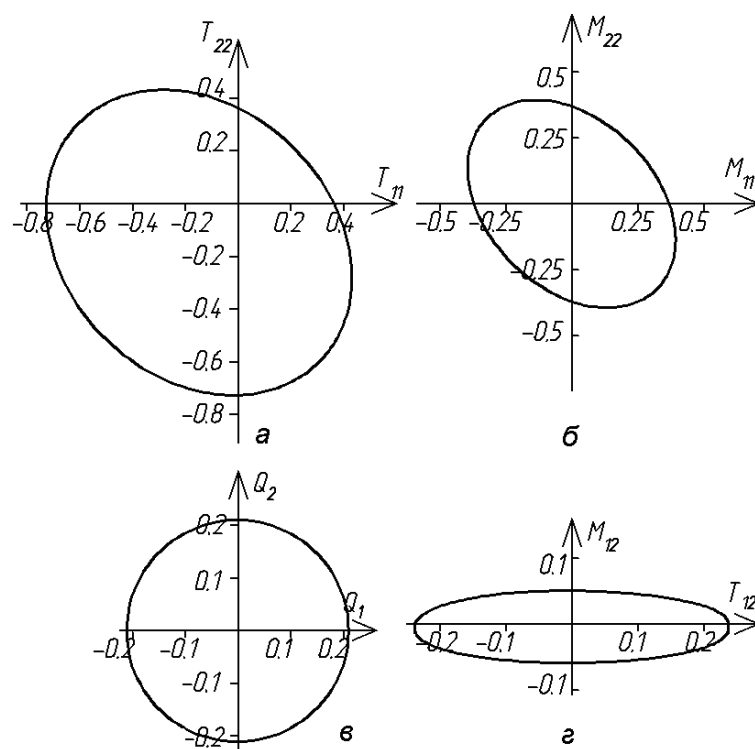


Рис. 4.1.16

Согласно разделу 3.3.2. определим коэффициенты для условий (3.2.17), затем подставим найденные с использованием алгоритма А4 длины линий разрушения в (3.2.10). Таким образом, получим все необходимые исходные данные для задачи линейного программирования. Решив эту задачу, получим минимальное значение разрушающей нагрузки μ (3.2.10), а также скорости перемещений полюсов и поворотов жестких дисков, мощности внутренних силовых факторов, развиваемые на концах линий разрушения. Приведем в таблицах 4.1.5.3, 4.1.5.4 эти результаты для рассматриваемой цилиндрической оболочки (рис. 4.1.14).

Таблица 4.1.5.3

$\min \mu^+ = 1.230646778$						
№ диска	$v_x, \text{ м/с}$	$v_y, \text{ м/с}$	$v_z, \text{ м/с}$	$\omega_x, \text{ с}^{-1}$	$\omega_y, \text{ с}^{-1}$	$\omega_z, \text{ с}^{-1}$
1	0	-0.234548	-0.890593	-2.6009	0.00805	-0.01612
2	0.001651	0	-1.25202	0	0	0
3	0	0.236637	-0.89368	2.6077	0.00485	0.00979
4	-0.003844	0.000825	-1.25318	0	0.03384	0
5	0	0	-1.25302	0	0	0
6	-0.019155	0.000825	0	0	0	0
7	0.001652	0	0	0	0	0

Таблица 4.1.5.4

Скорости диссипации		
№ линии, i	N _{i1} , МН/с	N _{i2} , МН/с
1: 2-1	0.389913533	0.38411192
2: 3-2	0	0
3: 4-3	0.386818114	0.39030939
4: 1-4	0	0
5: 5-6	0.007679236	0.002497166
6: 6-7	0.0005945	0.0005945
7: 7-8	0.001408207	0.004526657
8: 8-5	0.001844042	0.001844042
9: 1-5	0.365652089	0.004301567
10: 6-2	0.002069695	0.373291945
11: 7-3	0.001029039	0.373670928
12: 8-4	0.002959326	0.370044953

В графическом виде полученные результаты можно изобразить, как показано на рис. 4.1.17. Обозначим красным и синим цветами линии, полученные по аппроксимирующим точкам. Координаты этих аппроксимирующих точек определим, используя полученные, в результате решения задачи линейного программирования, скорости перемещений полюсов и поворотов жестких дисков. Выбор цвета для каждой линии производится по следующему принципу: если, например, красным цветом обозначен край диска №5, то синим – край диска, смежного с диском №5 (здесь это диски №№ 1, 2, 3, 4), черным цветом, соответственно, обозначены линии до разрушения. Координаты каждой аппроксимирующей точки для красных и синих линий определены по формуле

$$k_j^n = k_j^0 + tv_j^n + t[\vec{\omega}_n, \vec{r}]_j, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (4.1.5.1)$$

где k_j^n – j -ая координата точки после перемещения диска n , м; k_j^0 – координата этой же точки до разрушения, м; t – некоторый промежуток времени, с; $\vec{\omega}_n$ – угловая скорость поворота n -го диска, \vec{r} – радиус вектор от искомой точки до полюса диска n , v_j^n – j -я проекция скорости перемещения полюса диска n , м/с. Вычислив по формуле (4.1.5.1) координаты аппроксимирующих точек на линиях разрушения, построим линии, как на рис. 4.1.17. Для каждой линии получим красный и синий варианты движения (диски А или В). По смещению цветной линии от черной можно судить об относительной скорости перемещения (чем дальше цветная линия

от черной, тем быстрее перемещается соответствующий диск). По взаимному положению цветных линий можно судить о величине мощности диссипации на линиях разрушений (если синяя и красная линии относительно далеки друг от друга, то имеет место относительно большая мощность диссипации). Так, на линиях 5-6, 8-5, 7-8, 6-7 красная и синяя линии практически совпадают, все они смещены по оси Z на одинаковые расстояния. Тогда мощность на этих линиях должна быть близка к нулю, а скорость перемещения диска №5 должна иметь относительно большую проекцию по оси Z . Как видно из таблицы 4.1.5.3, диск №5 имеет лишь скорость перемещения по оси Z , а по таблице 4.1.5.4 линии 5-6, 8-5, 7-8, 6-7 имеют мощности диссипации, близкие к нулю.

Таким же образом можно рассмотреть, например, диски № 1 и №3, линии разрушения 8-3 и 7-3. Для этих линий характерна относительно большая мощность на точках 4 и 3 (расхождение красной и синей линий в этих точках); а также относительная малая мощность, развиваемая на точках 8 и 7 (красная и синяя линии практически совпадают). Как видно из таблицы результатов, это соответствует расчетам.

На рис. 4.1.18 приведена эпюра скоростей диссипации внутренней энергии. Значения скоростей для промежуточных точек на линиях разрушения определяются линейной аппроксимацией между значениями скоростей на концах соответствующих линий разрушения.

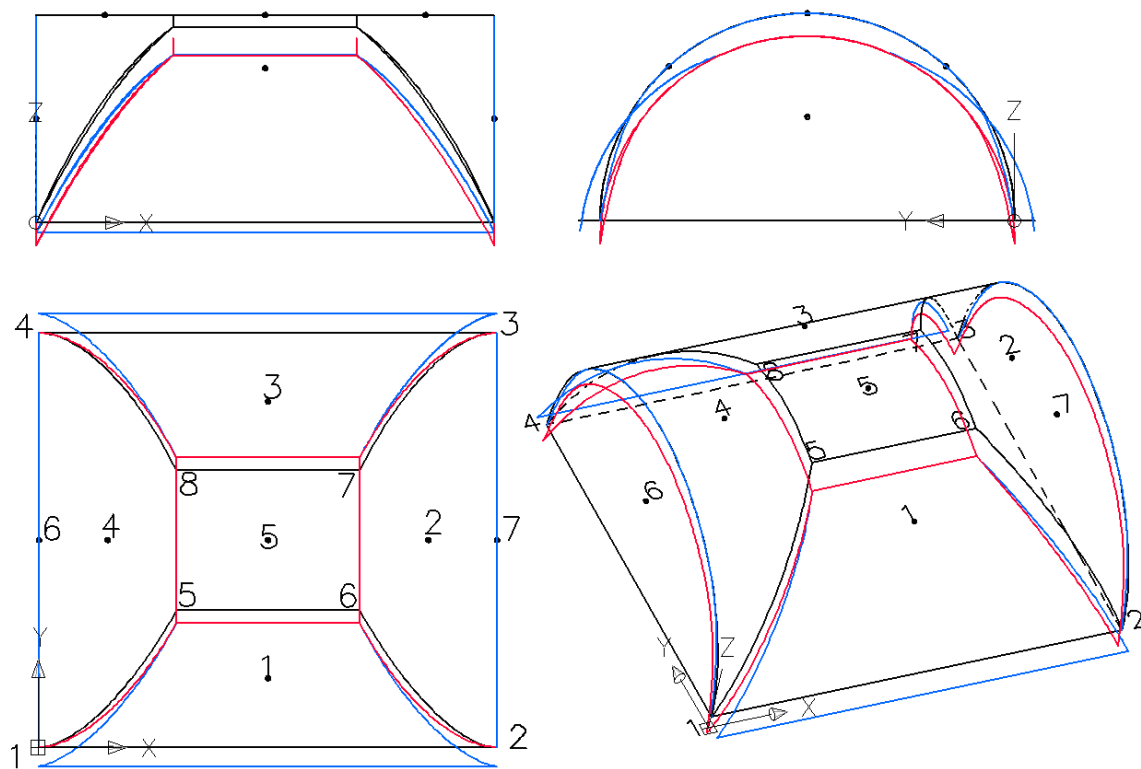


Рис. 4.1.17

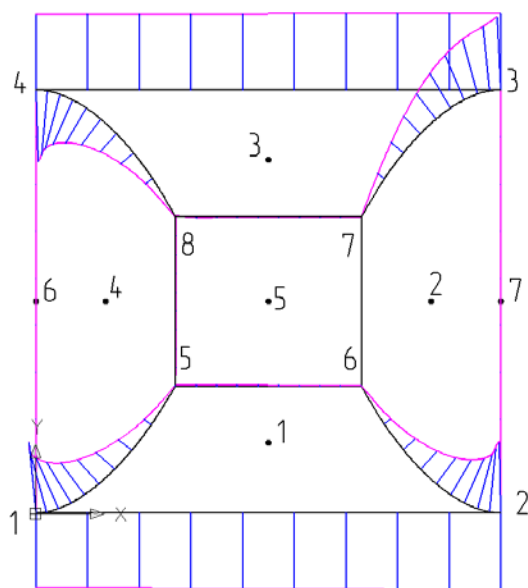


Рис. 4.1.18

Сравним наши расчетные результаты с соответствующими результатами расчетов, приведенными в [64]. На рис. 4.1.19 сплошные линии 1 и 2 получены по нашей методике, штриховые линии заимствованы из [64]. Здесь $\lambda = L/b$ (отношение длины оболочки к ее ширине), $\alpha = R_t/R_c$ (отношение пределов текучести при растяжении и сжатии). Здесь $N_0 = R_c$, N_0 – предельная погонная сила при чистом сжатии.

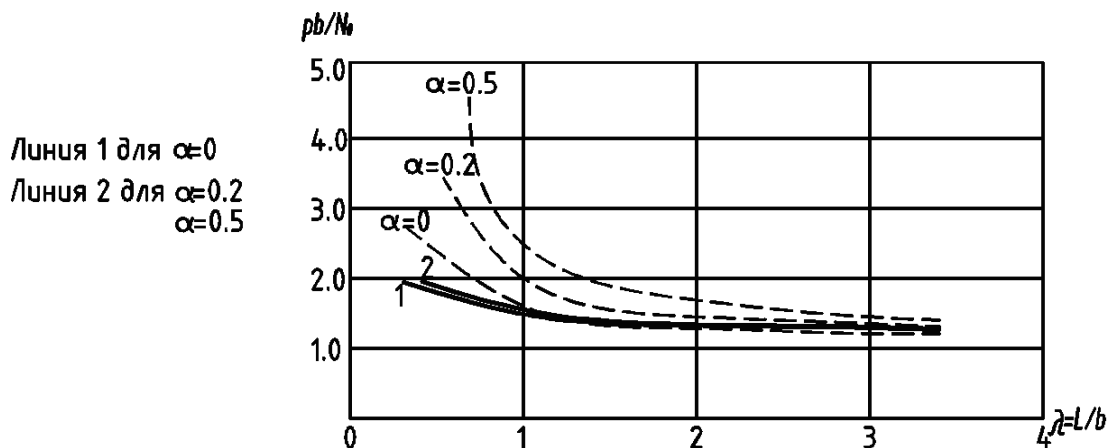


Рис. 4.1.19

Как видно, наши результаты расчетов хорошо согласуются с соответствующими результатами других авторов. Получены хорошие верхние оценки для разрушающей нагрузки. При $\lambda < 1$ наши верхние оценки существенно отличаются от соответствующих результатов, приведенных в [64].

4.2. Определение разрушающей нагрузки для сферического купола с вырезами

Рассмотрим железобетонный шарнирно опертый сферический купол, радиус срединной поверхности 3 м, стрела подъема 2.5 м, на высоте 1.4 м имеются 3 горизонтальных отверстия 0.5x0.3 м, 1.5x0.3 м, 0.5x0.3 м, как показано на рис. 4.2.1. Напротив отверстий вырезана входная дверь размерами 0.9x2.1 м.

4.2.1. Исходный вариант задачи

Предварительно примем равномерное армирование материала купола: железобетонная оболочка толщиной 120 мм, арматура диаметром 10 мм, с шагом 100 мм в сжатой и растянутой зонах. Процент армирования равен 1.31%. Условно будем считать, что оболочка состоит из пяти совместно работающих слоев. Толщины этих слоев: $h_1 = h_5 = 15$ мм; $h_2 = h_4 = 10$ мм; $h_3 = 70$ мм. Углы ориентации слоев: $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = 0^\circ$.

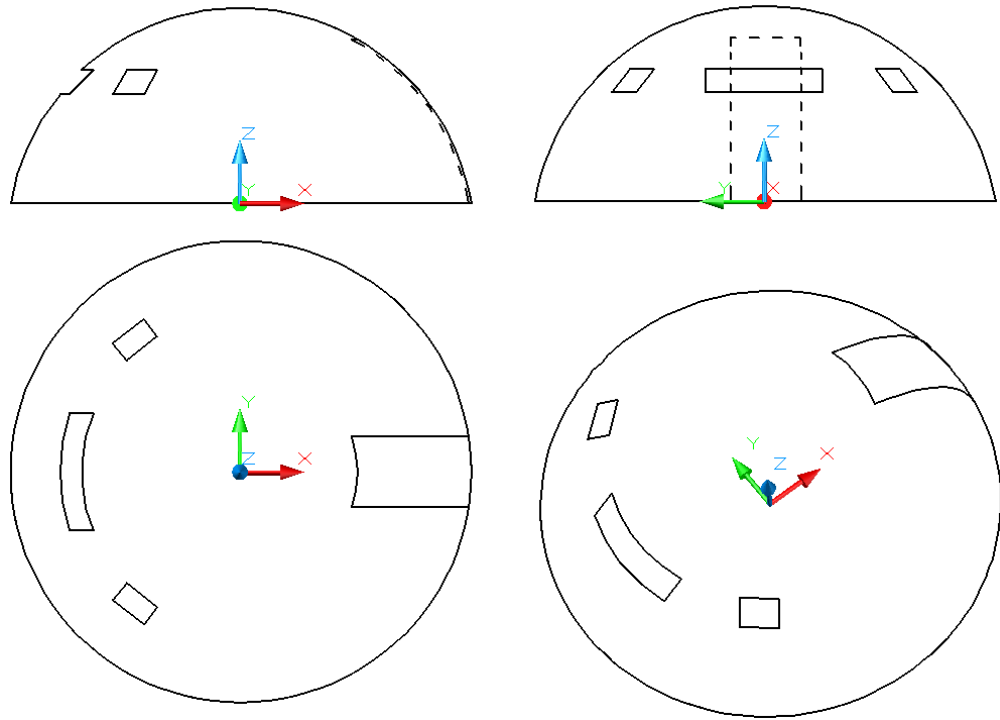


Рис. 4.2.1

На рис. 4.2.2 приведены: а – сечение гиперповерхности прочности для материала купола плоскостью $T_{11}OT_{22}$, б – сечение гиперповерхности плоскостью $M_{11}OM_{22}$, в – сечение гиперповерхности плоскостью $Q_{31}OQ_{32}$, г – сечение гиперповерхности плоскостью $T_{12}OM_{12}$. В пространстве напряжений поверхности прочности описываются следующими уравнениями:

для слоев 1, 3, 5:

$$17.45\sigma_{xx}^2 - 8.71\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 17.45.6\sigma_{yy}^2 + 8.22\sigma_{xx} + 8.22\sigma_{yy} + 76.11(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 1 \quad (МПа^2);$$

для слоев 2, 4:

$$0.744\sigma_{xx}^2 - 0.157\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 17.45.6\sigma_{yy}^2 + 0.336\sigma_{xx} + 8.22\sigma_{yy} + 64.93(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 1 \quad (МПа^2);$$

Здесь силы – в МН/м, моменты – в МН·м/м. Коэффициенты этих уравнений определены по аналогии с примером П1.

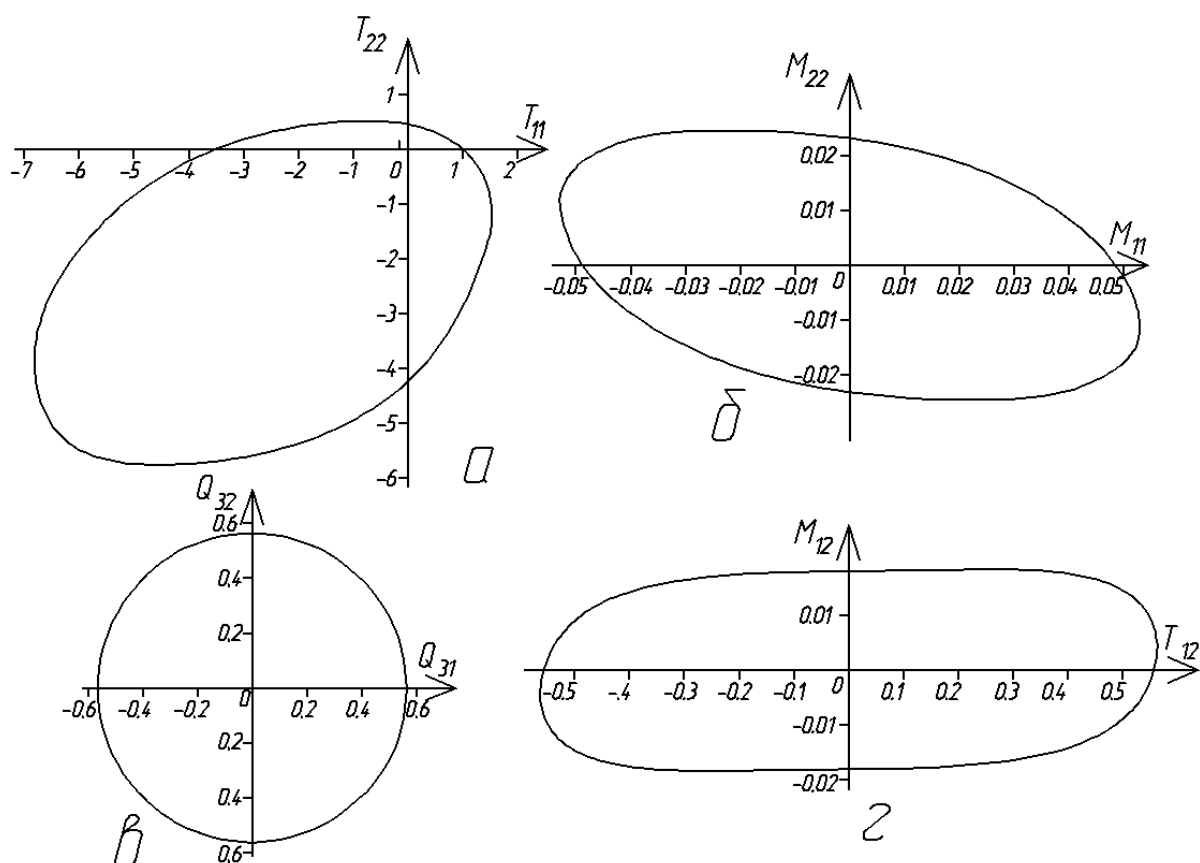
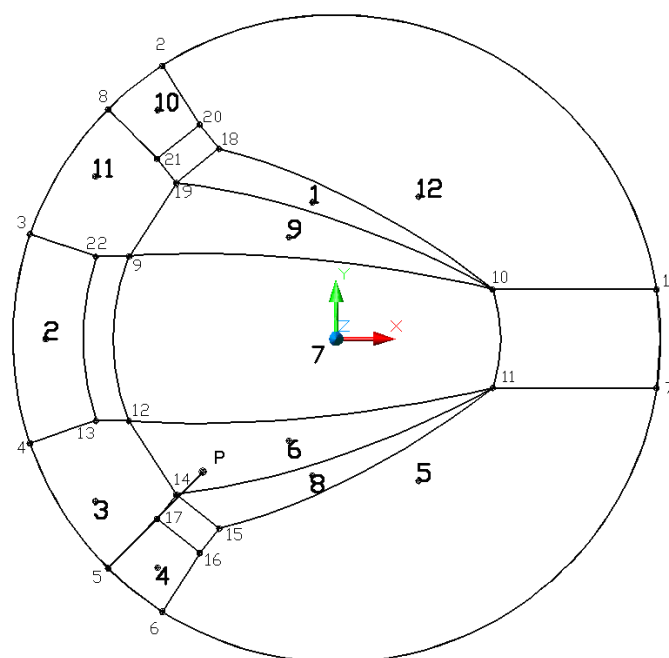
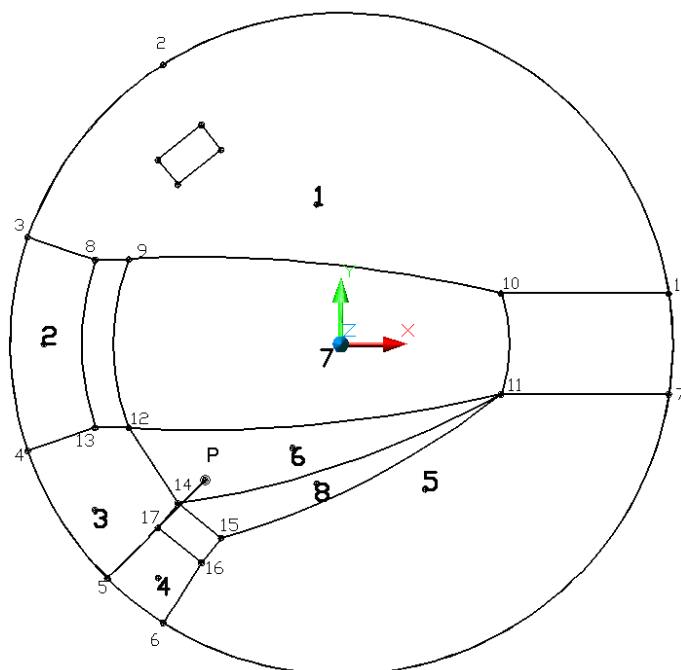


Рис. 4.2.2

Точка приложения внешней нагрузки на внешней поверхности оболочки обозначена буквой P (-1.2167; -1.2167; 1.9575); линия действия этой сосредоточенной силы имеет направляющие косинусы: (0.5; 0.5; -0.707106781) и пересекает вертикальную ось сферы.

Для определения минимальной разрушающей нагрузки рассмотрим несколько вероятных схем разрушения этой конструкции. На рис. 4.2.3-4.2.7 приведены варианты разбиения на жесткие диски рассматриваемой конструкции.



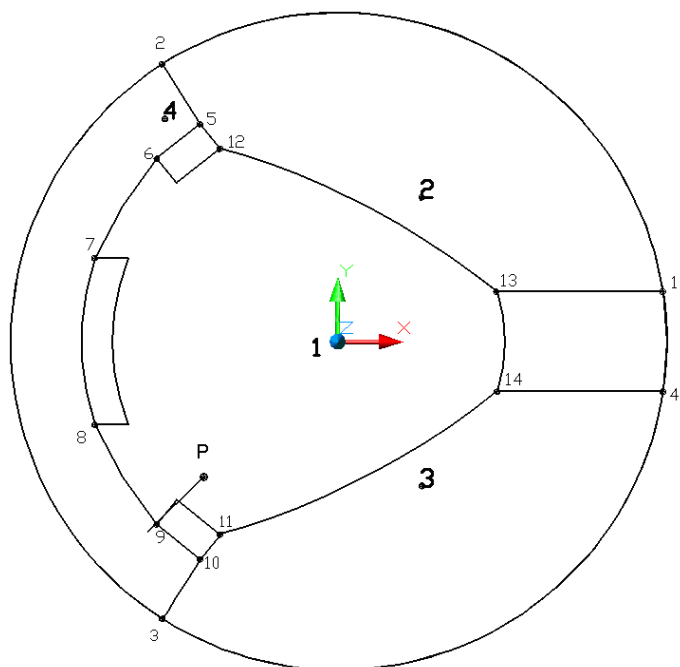


Рис. 4.2.5

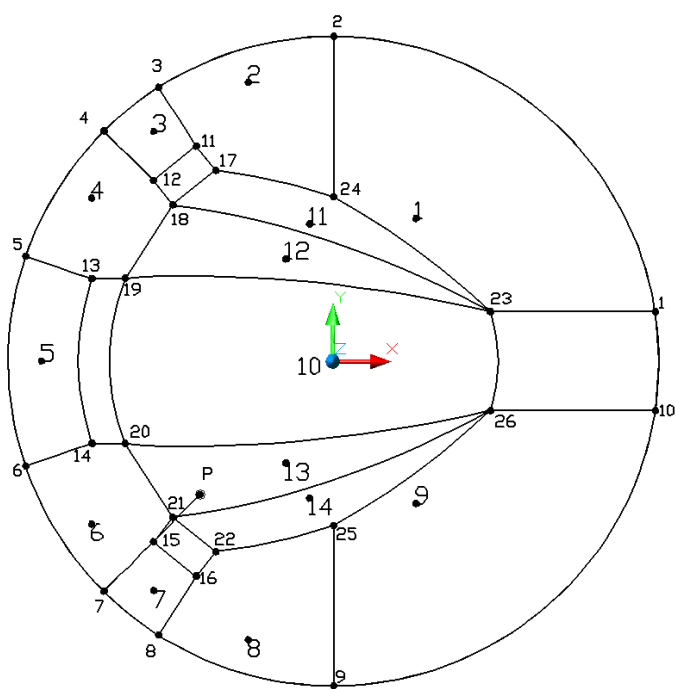


Рис. 4.2.6

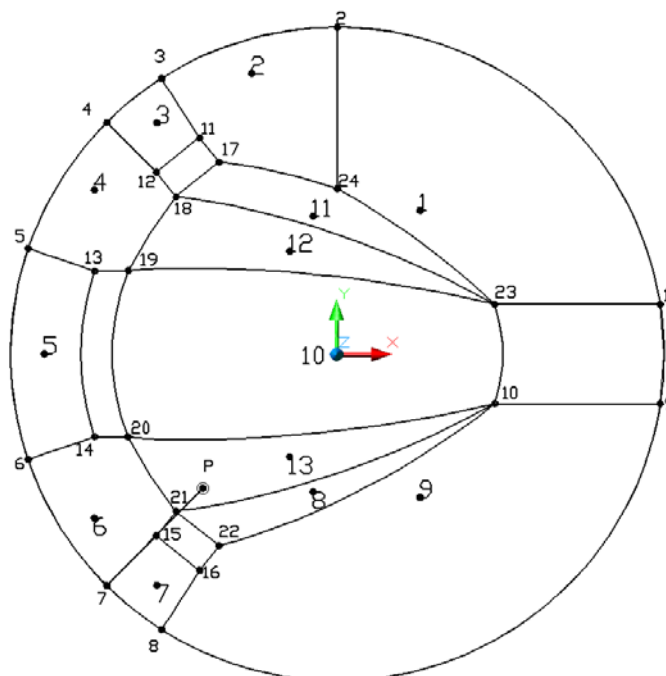


Рис. 4.2.7

Для каждого из приведенных вариантов разбиения конструкции на жесткие диски произведем расчет согласно описанной выше методики. Приведем, например, таблицу 4.2.1.1 исходных данных для варианта на рис. 4.2.5.

Таблица 4.2.1.1

1	2	3	4	5	6	7	8
№ линии	Точка O_1	Точка O_2	Диск А	Диск В	Длина, м	α в O_1 , рад	α в O_2 , рад
1	1	2	2	0	5.8307	-0.250198	0.250198
2	2	3	4	0	5.88915	-0.255626	0.255626
3	3	4	3	0	5.8307	-0.250198	0.250198
4	2	5	2	4	1.555259	1.570796	1.570796
5	3	10	3	4	1.555259	-1.570796	-1.570796
6	9	8	1	4	1.06032	-0.14668	0.1466796
7	6	7	1	4	1.06032	-0.14668	0.1466796
8	12	13	1	2	2.95553	-0.951441	0.6581879
9	11	14	1	3	2.95553	-0.658188	0.951441

а также таблицу 4.2.1.2 характеристик внешних сил, увеличивающихся пропорционально параметру μ .

Таблица 4.2.1.2

Диск, i	F_x^{0i} , М	F_y^{0i} , М	F_z^{0i} , М	M_x^{0i} , М	M_y^{0i} , М	M_z^{0i} , М
1	0.5	0.5	-0.7071	1.13164	-1.13164	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0

Определим исходные данные для каждого такого варианта. Затем, определив коэффициенты для задач линейного программирования, получим решения этих задач для каждого варианта: минимальную разрушающую нагрузку, мощности, развиваемы на концах линий разрушения, а также скорости перемещений полюсов и угловые скорости поворотов жестких дисков. Результаты эти приведены в таблицах 4.2.1.3- 4.2.1.12.

Для схемы на рис. 4.2.3:

Таблица 4.2.1.3

min $\mu^+ = 2.60427091522893$						
№ диска	v_x , м/с	v_y , м/с	v_z , м/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹
1	0.04592	0.10142	0.02857	-0.046	0.0207	-2E-06
2	0.00048	-0.0025	0.00259	0.0015	-0.0078	-0.0078
3	-0.5414	-0.4467	0.09658	0.0784	-0.2316	-0.6336
4	-0.0335	-0.3344	0.13871	0.3025	0.3282	0.7807
5	0.11917	-0.2632	0.01696	0.1254	0.0568	5.9E-07
6	0.23589	-0.5509	-0.951	1.4522	0.0366	0.18176
7	0.07353	-0.1738	-0.194	0.4657	-0.0408	0.06696
8	-0.4035	1.05557	-0.2204	-3.031	-1.5003	-0.439

Соответствующая схема разрушения приведена на рис. 4.2.8:

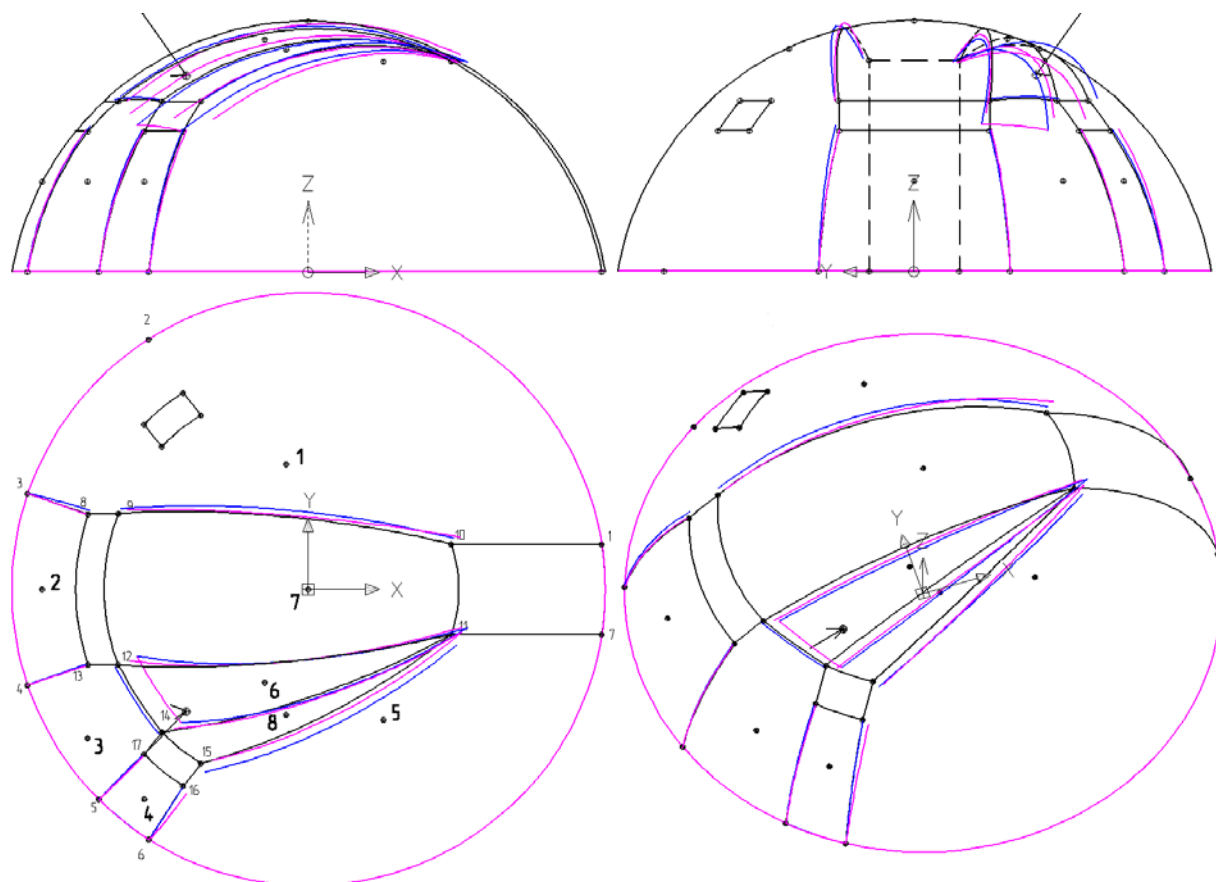


Рис. 4.2.8

Таблица 4.2.1.4

Скорости диссипации		
№ линии, i	N_{i1} , МН/с	N_{i2} , МН/с
1: 2-1	1.54697E-06	1.52168E-05
2: 3-2	0.14155892	3.70095E-06
3: 4-3	1.89602E-06	0.007569881
4: 5-4	0.465793223	0.001479859
5: 6-5	0.017919355	0.318596622
6: 7-6	6.17647E-07	1.40682E-06
7: 8-3	0.037845013	0.050091485
8: 13-4	0.198324106	0.015151588
9: 17-5	0.249838014	0.143341891
10: 16-6	0.019875231	0.020229165
11: 10-9	0.024134111	0.008494239
12: 12-11	0.01564432	0.013795657
13: 11-14	0.09320748	0.076162611
14: 15-11	0.0620624	0.133315278
15: 12-14	0.624269415	1.349635062

Соответствующая эпюра скоростей диссипации приведена на рис. 4.2.9.

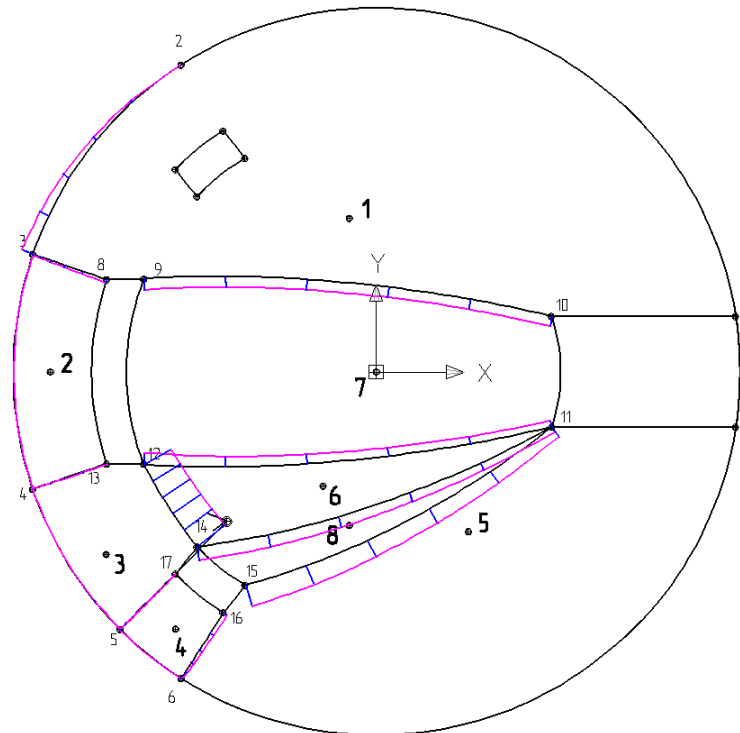


Рис. 4.2.9

Для схемы на рис. 4.2.4:

Таблица 4.2.1.5

min $\mu^+ = 1.92314942205558$						
№ диска	v_x , М/с	v_y , М/с	v_z , М/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹
1	0.23344	0.55864	0.18975	0.1654	-0.0958	0.0669
2	2.1E-10	0	0	0	1E-10	0

3	0	0	0	0	0	-2E-10
4	0	-1E-10	0	0	0	0
5	0.04567	-0.1009	0.0065	0.04808	0.02177	0
6	0.43047	0.13306	-0.4704	1.04868	-0.0337	0.1671
7	0.29007	0.52688	0.0043	0.16542	-0.0958	0.0669
8	-0.2968	0.79063	-0.1064	-2.0026	-1.011	-0.3104
9	0.24517	0.52779	0.11659	0.16542	-0.0958	0.0669
10	1.2E-10	0	0	0	0	1E-10
11	1.3E-10	0	0	0	1.3E-10	1E-10
12	0.32103	0.70897	0.04568	-0.3379	0.15301	0

Соответствующая схема разрушения приведена на рис. 4.2.10:

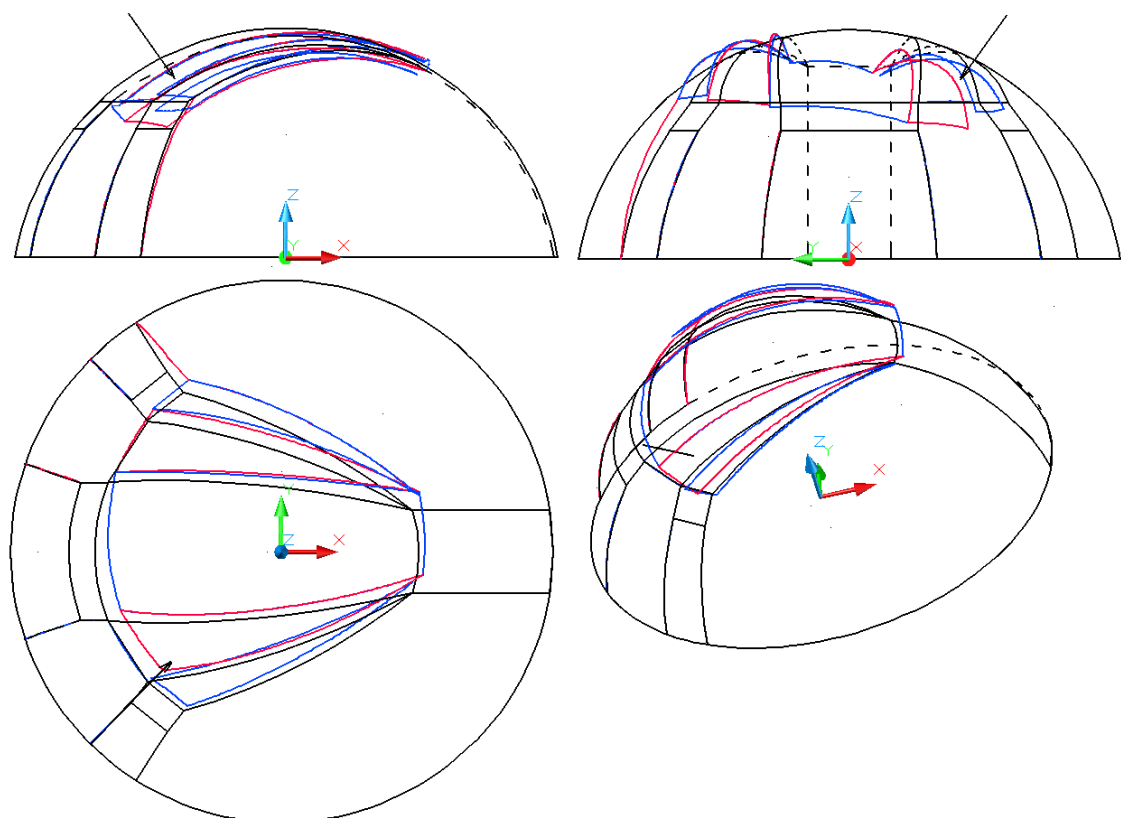


Рис. 4.2.10

Таблица 4.2.1.6

Скорости диссипации		
№ линии, i	N _{i1} , МН/с	N _{i2} , МН/с
1: 2-1	0	0
2: 8-2	0	0
3: 3-8	0	0
4: 4-3	0	0
5: 5-4	0	0
6: 6-5	0	0
7: 7-6	0	0
8: 3-22	0	0

9: 13-4	0	0
10: 17-5	0	0
11: 16-6	0.030971781	0.000427936
12: 9-10	0	0
13: 12-11	0.013856193	0.012280233
14: 11-14	0.257038602	0.229030017
15: 15-11	0.040395062	0.061768891
16: 12-14	0.363195228	0.725871725
17: 2-20	0.00300791	0.217696869
18: 21-8	0	0
19: 18-10	0.009875125	0.014975258
20: 10-19	0	0
21: 9-19	0.363362305	0.323040458

Соответствующая эпюра скоростей диссипации приведена на рис. 4.2.11.

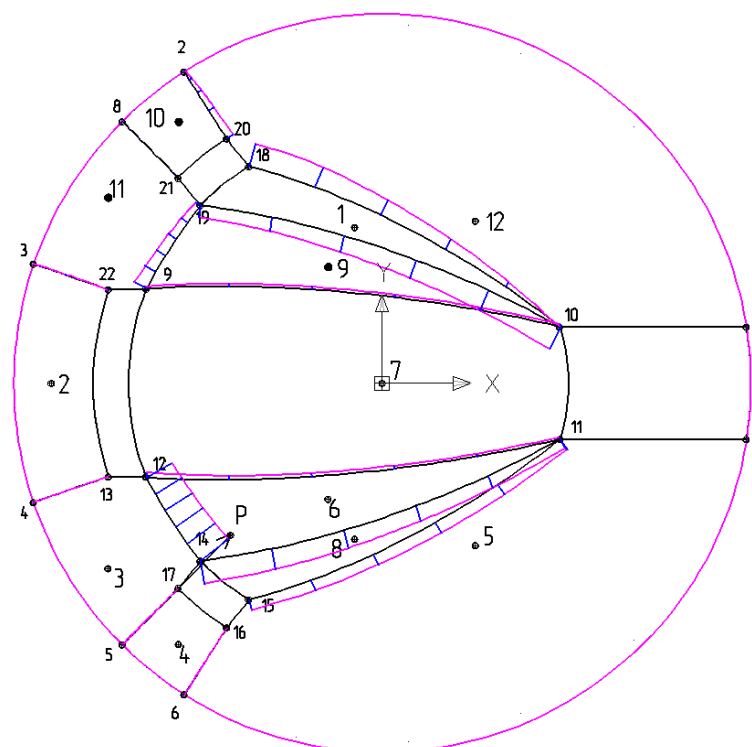


Рис. 4.2.11

Для схемы на рис. 4.2.5:

Таблица 4.2.1.7

min $\mu^+ = 3.03945863473411$						
№ диска	v_x , м/с	v_y , м/с	v_z , м/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹
1	0.32458	0.4981	-0.0993	0.2894	-0.1687	0.10776
2	0.34371	0.75905	0.0489	-0.3618	0.16382	0
3	0.01938	-0.0428	0.0027	0.0204	0.00924	0
4	-0.0826	0	0.0018	0	-0.0758	0

Соответствующая схема разрушения приведена на рис. 4.2.12:

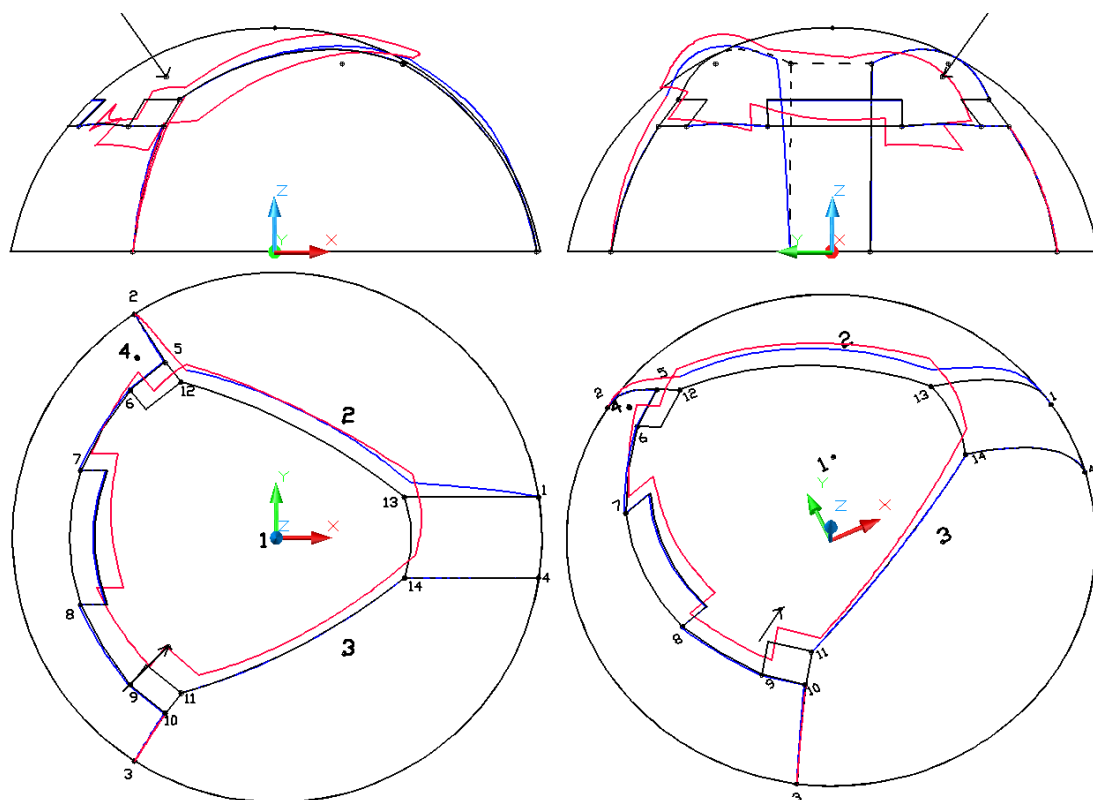


Рис. 4.2.12

Таблица 4.2.1.8

Скорости диссипации		
№ линии, i	N_{i1} , МН/с	N_{i2} , МН/с
1: 2-1	0	0
2: 3-2	0	0
3: 4-3	0	0
4: 5-2	0.277833319	0.002472416
5: 3-10	0.000378915	0.057893436
6: 9-8	0.737396706	0.592463245
7: 7-6	0.434050333	0.423287739
8: 12-13	0.012866384	0.019796131
9: 14-11	0.403422472	0.657870281

Соответствующая эпюра скоростей диссипации приведена на рис. 4.2.13.

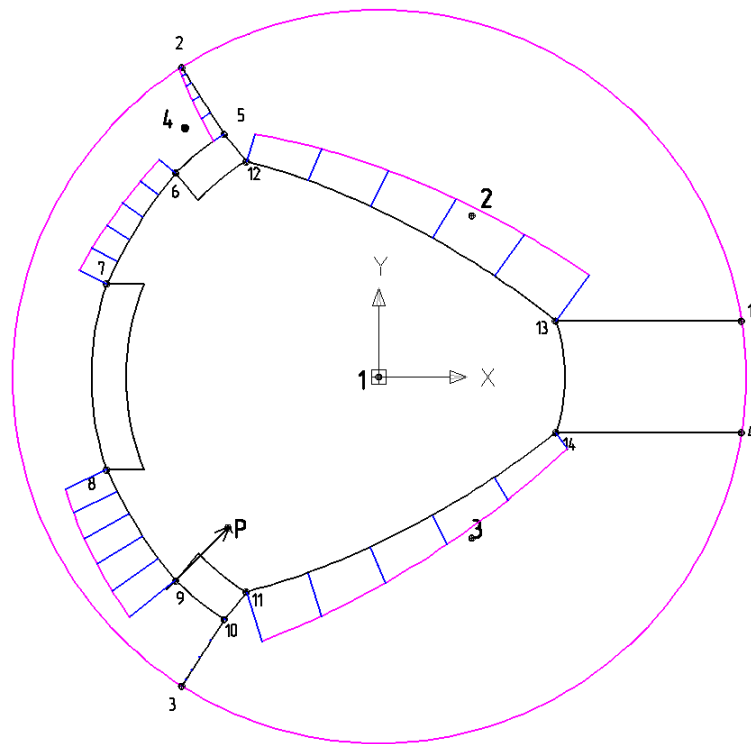


Рис. 4.2.13

Для схемы на рис. 4.2.6:

Таблица 4.2.1.9

min $\mu^+ = 3.11469720044028$						
№ диска	$v_x, \text{ м/с}$	$v_y, \text{ м/с}$	$v_z, \text{ м/с}$	$\omega_x, \text{ с}^{-1}$	$\omega_y, \text{ с}^{-1}$	$\omega_z, \text{ с}^{-1}$
1	0.36404	0.54329	0.20828	-0.1818	0.16544	-0.0632
2	0.19203	0.24699	0.09013	-0.1835	-0.0018	0.16729
3	0.00177	-2E-06	0.00049	-0.0102	-0.0006	-0.0195
4	-0.0054	0.00353	0.00185	-0.0042	-0.0068	-0.0003
5	-0.0046	3.9E-05	0.00078	-2E-05	-0.0052	-9E-05
6	-0.0111	-0.0079	0.00273	0.0050 2	-0.009	-0.0057
7	-0.0053	-0.0084	0.00349	0.0089 3	-0.0024	0.00799
8	-0.0014	-0.006	0.0013	0.0064 7	-0.0019	-0.0005
9	0.04585	-0.0534	0.02587	0.0254 7	0.02185	-1E-08
10	0.24938	0.24504	-0.1455	0.4870 9	-0.1556	0.05192
11	0.36686	0.64512	0.42437	-0.2748	0.25361	-0.0677
12	0.19034	0.07487	0.39362	1.0144 1	-0.2007	0.11565
13	0.30831	0.42427	-0.5875	0.2335 5	-0.1821	0.0206
14	0.14412	0.3325	-0.3834	-0.0322	-0.3725	-0.1194

Таблица 4.2.1.10

Скорости диссипации		
№ линии, i	N _{i1} , МН/с	N _{i2} , МН/с
1: 2-1	0.117921659	0.017525936
2: 3-2	0.190496116	0.119073891
3: 4-3	0.001011562	0.008070639
4: 5-4	6.64068E-05	0.000200084
5: 6-5	2.90869E-05	6.14798E-05
6: 7-6	0.004223999	3.38459E-09
7: 8-7	0	0.003036717
8: 9-8	0.000291437	0.000184628
9: 10-9	9.53647E-08	8.98993E-08
10: 24-2	0.006383966	0.008710075
11: 11-3	0.192806655	0.06876615
12: 12-4	0.000502146	0.000536965
13: 13-5	0.002309641	3.322E-05
14: 14-6	0.004329959	0.000143658
15: 15-7	0.002005962	0.001148716
16: 16-8	0.002109072	0.000208643
17: 25-9	0.024567729	0.000279497
18: 23-24	0.019413498	0.009890808
19: 24-17	0.008685219	0.193623043
20: 23-18	0.027040372	0.020701224
21: 18-19	0.357321153	0.367115309
22: 19-23	0.008435002	0.007978659
23: 26-20	0.004343556	0.004134374
24: 20-21	0.566488108	0.63979848
25: 26-21	0.231837328	0.072722284
26: 25-26	0.254689238	0.128391493
27: 22-25	0.077220388	0.045213469

Соответствующие схема разрушения (слева) и эпюра скоростей диссипации (справа) приведены на рис. 4.2.14.

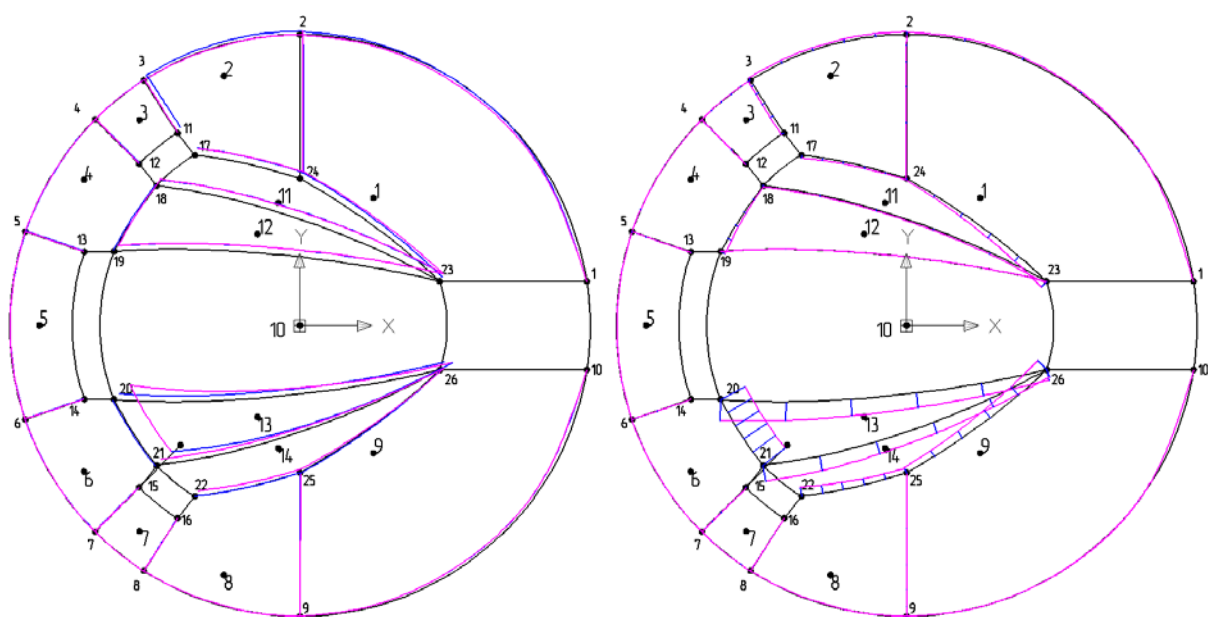


Рис. 4.2.14

Для схемы на рис. 4.2.7:

Таблица 4.2.1.11

min $\mu^+ = 3.51640144400819$						
№ диска	v_x , м/с	v_y , м/с	v_z , м/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹
1	0.2922	0.63485	0.27501	-0.2131	0.17603	-0.0473
2	0.05593	0.24941	0.0526	-0.1677	-0.0526	0.19472
3	0.02165	0.01387	0.00268	-0.0205	0.00984	-0.0374
4	0.00985	0.01083	0.00023	0.00176	0.00539	0.00818
5	0.01381	0.00409	-0.0001	-0.0007	0.00831	8.6E-05
6	0.02797	-0.0234	0.01069	-0.0096	0.00221	-0.0735
7	0.05955	-0.0473	0.00973	0.03646	0.03029	0.11597
8	0.04114	-0.0801	0.00108	-0.0024	0.01187	-0.018
9	0.04706	-0.0729	0.0033	0.03035	0.01493	-0.0064
10	0.21668	0.27869	-0.0643	0.36202	-0.1703	0.13225
11	0.12661	0.3974	0.24971	0.22317	-0.1326	0.11533
12	0.14343	0.35447	0.10579	0.25683	-0.1309	0.11815
13	0.42077	0.25122	-0.5235	0.48127	-0.1995	0.13221

Таблица 4.2.1.12

Скорости диссипации		
№ линии, i	N_{i1} , МН/с	N_{i2} , МН/с
1: 2-1	0	0.063279481
2: 3-2	0.067141404	0.127764027
3: 4-3	0.010292395	0.013428434
4: 5-4	0.005010603	0.005499805
5: 6-5	0.005538674	0
6: 7-6	0.007703762	0.086265602
7: 8-7	0.01059225	0.038993116
8: 9-8	0	0.026955269
9: 24-2	0.051394454	0.007855824
10: 11-3	0.114330239	0.03844399
11: 12-4	0.005873005	0.005662853
12: 13-5	0.001240743	0.001387348
13: 14-6	0.018550576	0.013386883
14: 15-7	0.01635042	0.013834868
15: 16-8	0.043113619	0.006948773
16: 23-24	0.018054761	0.17385668
17: 24-17	0.192558976	0.086403537
18: 23-18	0.000686659	0.001365956
19: 18-19	0.214607525	0.215348349
20: 19-23	0.001904474	0.021066583

21: 10-20	0	0.069405661
22: 20-21	0.530441426	0.69576256
23: 21-10	0.643407315	0.323637666
24: 10-22	0.001160642	0.013300758

Соответствующие схема разрушения (слева) и эпюра скоростей диссипации (справа) приведены на рис. 4.2.15.

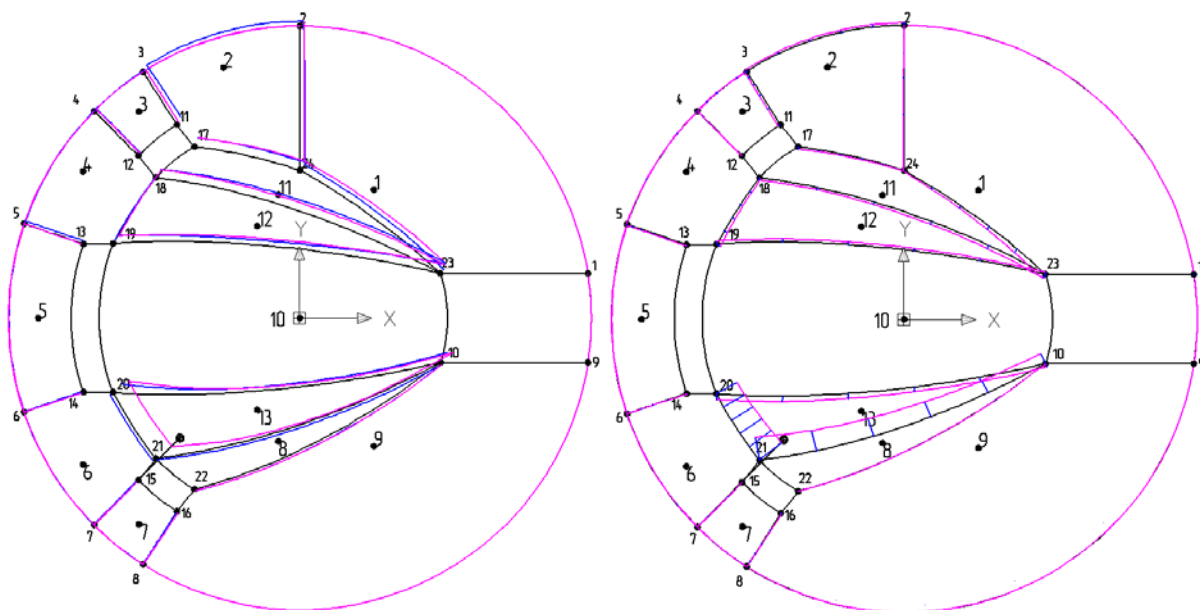


Рис. 4.2.15

Приведем сравнительную таблицу 4.2.1.13 результатов решения задач линейного программирования для всех схем разбиения на жесткие элементы, параметры арматуры одинаковые во всех точках купола.

Таблица 4.2.1.13			
Схема разбиения на жесткие элементы	Количество жестких элементов	Количество обобщенных линейных разрушения	$\min \mu^+$
Рис. 4.2.3	8	15	2.60427091522893
Рис. 4.2.4	9	21	1.92314942205558
Рис. 4.2.5	4	9	3.03945863473411
Рис. 4.2.6	14	27	3.11469720044028
Рис. 4.2.7	13	24	3.51640144400819

Как видно из таблицы 4.2.13, минимальная разрушающая нагрузка достигается для разбиения на жесткие элементы, согласно рис. 4.2.4. Заметим, что для достижения минимума μ^+ нет необходимости использования схемы с большим количеством жестких элементов, минимум достигается на определенном оптимальном варианте разбиения. Малое же число жестких элементов (как, например, на рис. 4.2.5), также не гарантирует достижения удовлетворительного минимума оценки разрушающей нагрузки.

4.2.2. Вариант усиления купола уменьшением шага арматуры

Как видно из схем разрушения и эпюр скоростей диссипации (рис. 4.2.8, ..., 4.2.15), наиболее интенсивно процесс разрушения развивается на линиях, близких к верхней части купола. Произведем усиление армирования в этих областях (для схемы на рис. 4.2.3 – в точках №№ 9-12, 14,15; для схемы на рис 4.2.4 – в точках №№ 9-12, 14, 15, 18, 19; ... ; для схемы на рис 4.2.7 – в точках №№ 10, 17-23), уменьшив вдвое шаг арматуры. На рис. 4.2.16 видно, как увеличились сечения гиперповерхности прочности плоскостями $T_{11}OT_{22}$ (а), $M_{11}OM_{22}$ (б), $Q_{31}OQ_{32}$ (в), $T_{12}OM_{21}$ (г) (сплошными линиями обозначены сечения гиперповерхности прочности до уменьшения шага арматуры, штриховыми – после уменьшения, гиперповерхность прочности для слоев 2 и 4 задана уравнением: $0.288\sigma_{xx}^2 - 0.358\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 17.456\sigma_{yy}^2 + 0.1145\sigma_{xx} + 8.22\sigma_{yy} + 54.63(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 1$, МПа²).

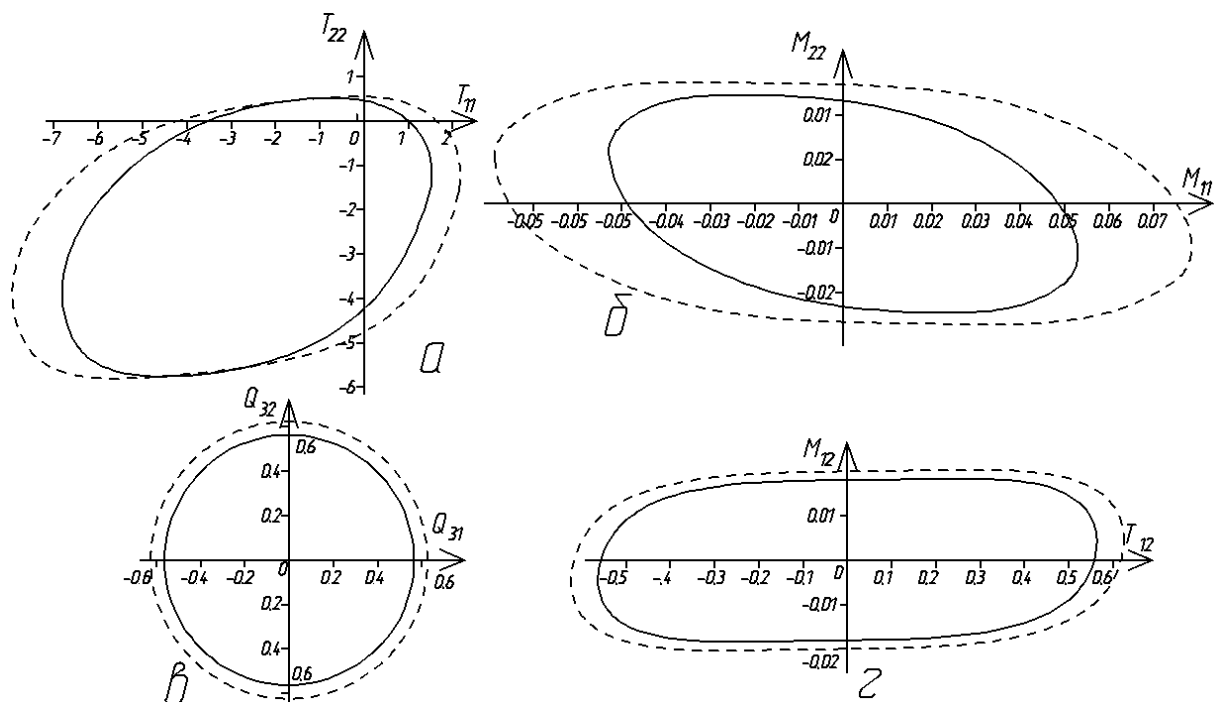


Рис. 4.2.16

На остальных точках характеристики материала, а следовательно, и гиперповерхность прочности, остаются прежними. Произведем расчет несущей способности того же купола с вырезами.

Произведем расчет несущей способности усиленного купола, рассматривая все предыдущие варианты разбиения на жесткие элементы. Результаты решения

соответствующих задач линейного программирования приведены в таблицах 4.2.2.1 – 2.4.1.10. Для схемы на рис. 4.2.3:

Таблица 4.2.2.1

min $\mu^+ = 2.74244524217951$						
№ диска	v_x , м/с	v_y , м/с	v_z , м/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹
1	0.08959	0.19463	0.05383	-0.0737	0.04114	-1E-10
2	-0.0091	0.00657	0.00196	-0.0001	-0.0061	-0.0221
3	-0.4509	-0.3285	0.07502	0.05337	-0.1914	-0.5688
4	-0.088	-0.2774	0.14186	0.33225	0.18453	0.65028
5	0.15766	-0.3464	0.02233	0.16697	0.07512	0
6	0.25376	-0.3036	-0.9499	1.0193	-0.002	0.13202
7	0.12224	-0.1632	-0.2236	0.57848	-0.0343	0.07972
8	-0.2517	0.93452	-0.2085	-2.985	-1.4357	-0.3622

Таблица 4.2.2.2

Скорости диссипации		
№ линии, i	N_{i1} , МН/с	N_{i2} , МН/с
1: 2-1	0	1.00929E-10
2: 8-2	0.228406035	0
3: 3-8	0.011348073	0.010175757
4: 4-3	0.317033835	0.024673715
5: 5-4	0.00492781	0.257074632
6: 6-5	0	1.56255E-10
7: 7-6	0.103052824	0.097607374
8: 3-22	0.148865488	0.01160913
9: 13-4	0.176100552	0.102405048
10: 17-5	0.069975996	0.007557321
11: 16-6	0.020169645	0.00731361
12: 9-10	0.016633744	0.011004524
13: 12-11	0.135241703	0.093061114
14: 11-14	0.08713515	0.157875327
15: 15-11	0.678133172	1.307233901

Соответствующие схема разрушения (слева) и эпюра скоростей диссипации (справа) приведены на рис. 4.2.17.

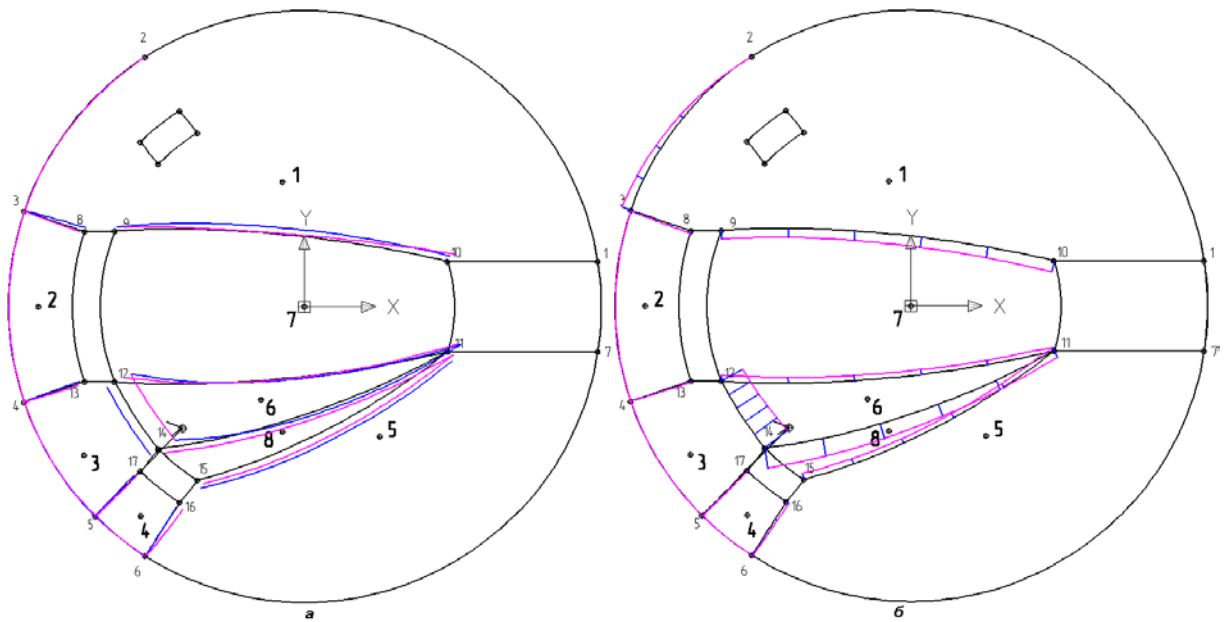


Рис. 4.2.17

Для схемы на рис. 4.2.4:

Таблица 4.2.2.3

min $\mu^+ = 2.24917215491637$						
№ диска	v_x , м/с	v_y , м/с	v_z , м/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹
1	0.25921	0.6052	0.1921	1E-05	-0.0121	0.0438
2	0.00483	-0.0004	-4E-04	0.0002	0.00408	-0.0012
3	-0.0021	-0.0028	-3E-04	-0.0027	0.00286	-0.0088
4	-1E-04	-0.0048	0.002	0.0042	0.00486	0.01042
5	0.03232	-0.0714	0.0046	0.034	0.0154	-8E-07
6	0.44659	0.1349	-0.506	1.0305	0.00539	0.16163
7	0.3133	0.4393	0.0239	0.3054	-0.0449	0.08
8	-0.2516	0.7127	-0.128	-1.7278	-0.8556	-0.2569
9	0.27195	0.5958	0.1895	3E-06	-0.0121	0.0438
10	0.00214	0.0019	-6E-04	0.0029	0.0021	0.00682
11	0.00458	-0.0002	-7E-04	0.0019	0.00357	0.00222
12	0.31117	0.6872	0.0443	-0.3276	0.14832	-3E-06

Соответствующая схема разрушения приведена на рис 4.2.18.

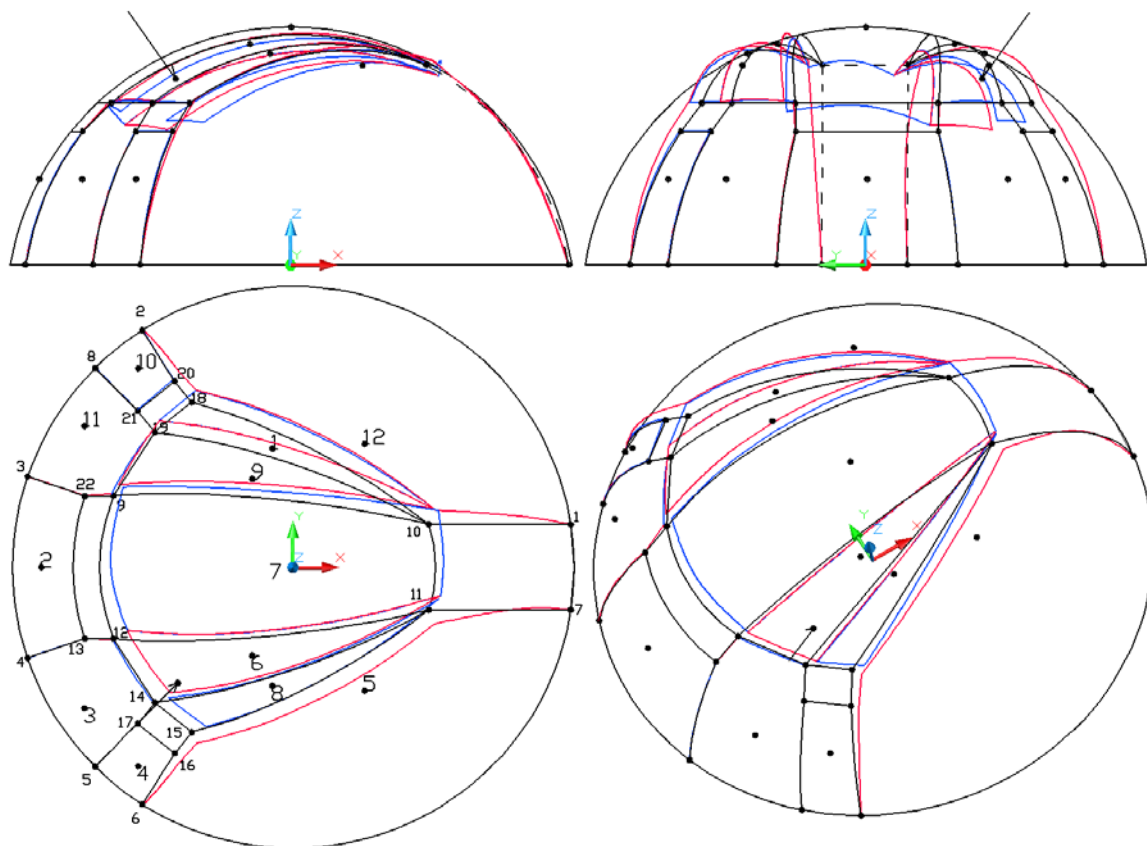


Рис. 4.2.18

Таблица 4.2.2.4

Скорости диссипации		
№ линии, i	N_{i1} , МН/с	N_{i2} , МН/с
1: 2-1	5.18836E-06	7.75822E-06
2: 8-2	0.000661344	0.003037449
3: 3-8	0.001365512	0.000672067
4: 4-3	7.48108E-07	0.001183419
5: 5-4	0.006497891	3.03886E-06
6: 6-5	0.000331846	0.004375742
7: 7-6	3.73683E-06	5.78303E-06
8: 3-22	9.04415E-05	7.91149E-05
9: 13-4	0.000185254	0.000196415
10: 17-5	0.002071682	0.002069745
11: 16-6	0.020747656	0.000359358
12: 9-10	0.0053487	0.005999491
13: 12-11	0.012237961	0.013593838
14: 11-14	0.288889659	0.306086137
15: 15-11	0.051406497	0.081102064
16: 12-14	0.387911911	0.794989651
17: 2-20	0.002873571	0.208457934
18: 21-8	0.000186235	0.000187558
19: 18-10	0.009549571	0.014989655
20: 10-19	3.22779E-07	1.47223E-07
21: 9-19	0.463270271	0.349535888

Соответствующая эпюра скоростей диссипации приведена на рис. 4.2.19.

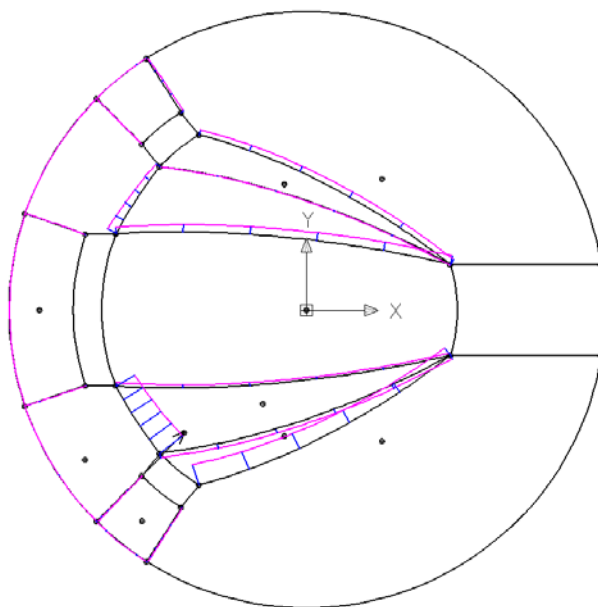


Рис. 4.2.19

Для схемы на рис. 4.2.5:

Таблица 4.2.2.5

min $\mu^+ = 3.14615810893931$						
№ диска	v_x , м/с	v_y , м/с	v_z , м/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹
1	0.313873	0.4995	-0.10495	0.290842	-0.16783	0.101385
2	0.340575	0.75214	0.048465	-0.35849	0.162327	0
3	-0.00137	0.00304	-0.0002	-0.00145	-0.00066	0
4	-0.09144	0	0.00203	0	-0.08391	0

Таблица 4.2.2.6

Скорости диссипации		
№ линии, i	N_{i1} , МН/с	N_{i2} , МН/с
1: 2-1	0	0
2: 3-2	0	0
3: 4-3	0	0
4: 5-2	0.280529155	0.002362554
5: 3-10	0.000683857	0.048639278
6: 9-8	0.740420581	0.592702043
7: 7-6	0.444654821	0.432458691
8: 12-13	0.018876774	0.030418012
9: 14-11	0.395489578	0.716457595

Соответствующие схема разрушения (слева) и эпюра скоростей диссипации (справа) приведены на рис. 4.2.20.

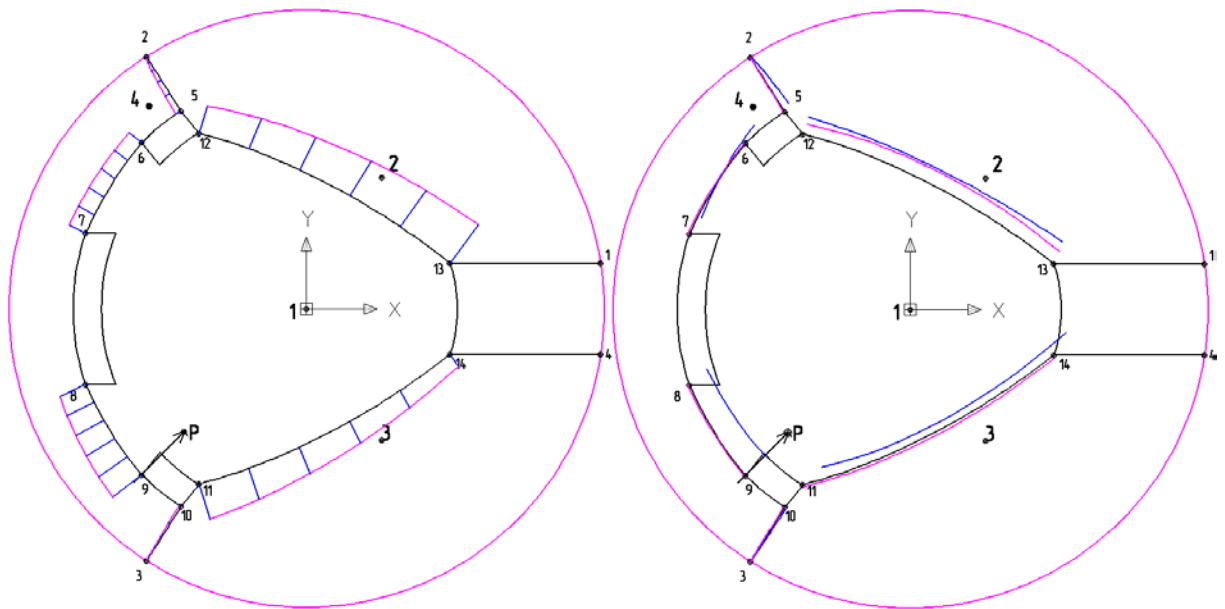


Рис. 4.2.20

Для схемы на рис. 4.2.6:

Таблица 4.2.2.7

min $\mu^+ = 3.30983676127545$						
№ диска	v_x , м/с	v_y , м/с	v_z , м/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹
1	0.34299	0.54557	0.19057	-0.1739	0.16203	-0.0718
2	0.17841	0.26574	0.08651	-0.1831	-0.0182	0.18233
3	0.07171	0.00143	-0.0096	0.0059	0.05561	-0.0212
4	0.01741	-0.0049	0.0007	0.00932	0.01102	-0.0024
5	0.01132	-0.0056	0.00094	0.00032	0.00237	-0.0025
6	-0.0251	-0.0152	0.00316	-0.002	0.00184	-0.0598
7	-0.0071	-0.0153	0.00241	0.03654	0.0189	0.05621
8	-0.0039	-0.0107	0.00364	0.01722	-0.0006	4.5E-05
9	0.12997	-0.1006	0.05357	0.01664	0.03068	-1E-05
10	0.20308	0.22531	-0.1167	0.49576	-0.1395	0.04665
11	0.35735	0.63602	0.38856	-0.2931	0.24877	-0.0735
12	0.21981	0.14152	0.39683	0.88963	-0.1741	0.08406
13	0.299	0.34714	-0.6037	0.31639	-0.1587	0.04042
14	0.20665	0.33815	-0.4033	-0.0654	-0.3842	-0.115

Таблица 4.2.2.8

Скорости диссипации		
№ линии, i	N_{i1} , МН/с	N_{i2} , МН/с
1: 2-1	0.132720145	0.0192372
2: 3-2	0.155807675	0.107522335
3: 4-3	0.01371089	0.016373946
4: 5-4	0.00145751	0.011216567
5: 6-5	0.000973658	0.013460363
6: 7-6	0.027439064	0.000499668
7: 8-7	0	0.023321701
8: 9-8	1.70241E-05	1.74005E-05

9: 10-9	2.54727E-10	1.06146E-05
10: 24-2	0.007200449	0.006601619
11: 11-3	0.16613772	0.058935119
12: 12-4	0.006040756	0.00165862
13: 13-5	0	0.002029397
14: 14-6	0.006659446	0.000253008
15: 15-7	0.011345824	0.019154613
16: 16-8	0.001630285	0.001997099
17: 25-9	0.01750092	0.000141027
18: 23-24	0.013824748	0.007762688
19: 24-17	0.011539245	0.201779967
20: 23-18	0.038432143	0.025657782
21: 18-19	0.426479509	0.379506161
22: 19-23	0.006434615	0.007337971
23: 26-20	0.002713695	0.0032737
24: 20-21	0.587821169	0.735123359
25: 26-21	0.237468755	0.072901169
26: 25-26	0.304741309	0.10645965
27: 22-25	0.47642008	0.294928818

Соответствующие схема разрушения (слева) и эпюра скоростей диссипации (справа) приведены на рис. 4.2.21.

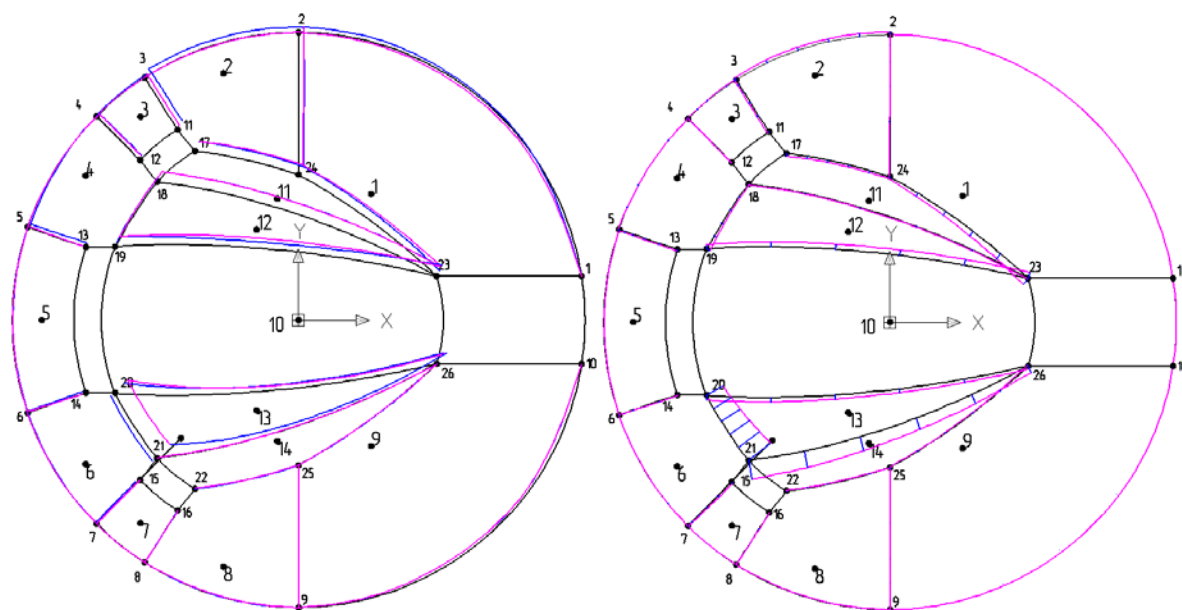


Рис. 4.2.21

Для схемы на рис. 4.2.7:

Таблица 4.2.2.9

min $\mu^+ = 3.61467402033449$						
№ диска	v_x , м/с	v_y , м/с	v_z , м/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹
1	0.33612	0.51181	0.19276	-0.16651	0.15337	-0.06215
2	0.17502	0.23841	0.06844	-0.16584	-0.01868	0.16585
3	0.09217	-0.01899	-0.01329	0.00791	0.04371	-0.02334
4	0.03613	-0.00248	0.00499	0.0039	0.01232	-0.04288

5	-0.00013	-6.9E-05	8.8E-05	0.00016	0.00018	-7.8E-05
6	-0.00089	-8E-05	5.8E-05	-0.00058	0.0004	-0.00102
7	-0.00017	0.00029	-0.0001	-8.8E-05	0.00095	0.00157
8	0.00148	0.00279	-0.00302	-0.00224	0.00033	0.00097
9	0.00016	0.0005	1.8E-05	-0.00041	4.3E-05	-3.1E-05
10	0.28387	0.22713	-0.1183	0.44167	-0.18932	0.09045
11	0.33532	0.58837	0.35857	-0.2766	0.1781	-0.02756
12	0.19985	0.09796	0.32375	0.82063	-0.2223	0.13675
13	0.39236	0.3444	-0.55602	0.26664	-0.20817	0.06871

Таблица 4.2.2.10

Скорости диссипации		
№ линии, i	N _{i1} , МН/с	N _{i2} , МН/с
1: 2-1	0.116320425	0.017562827
2: 3-2	0.135501413	0.124270101
3: 4-3	0.020533875	0.025645922
4: 5-4	0.014534551	0.019668907
5: 6-5	4.31934E-07	0.00022343
6: 7-6	0.001071122	0.000888658
7: 8-7	0.001114766	0.00054404
8: 9-8	0.000668641	0.000305562
9: 24-2	0.011012014	0.008635392
10: 11-3	0.139471486	0.049575774
11: 12-4	0.02115371	0.001464311
12: 13-5	0.005208645	0.01297747
13: 14-6	1.23278E-05	4.67767E-05
14: 15-7	0.000637378	0.00052826
15: 16-8	0.000160127	0.001270437
16: 23-24	0.089146367	0.014036137
17: 24-17	0.016348724	0.147805297
18: 23-18	0.036124061	0.018322524
19: 18-19	0.349249971	0.321805932
20: 19-23	0.00632087	0.009484108
21: 10-20	0.004659583	0.003562525
22: 20-21	0.632230581	0.705759543
23: 21-10	0.686837476	0.391270037
24: 10-22	0.002203432	0.001798523

Соответствующие схема разрушения (слева) и эпюра скоростей диссипации (справа) приведены на рис. 4.2.22.

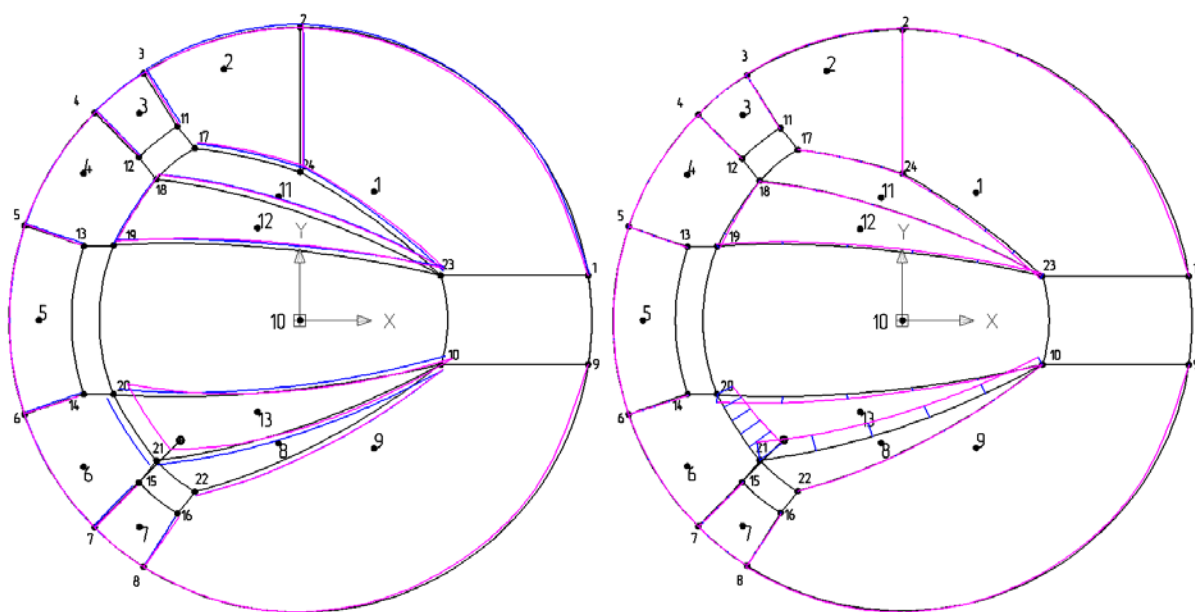


Рис. 4.2.22

Приведем сводную таблицу 4.2.2.11 результатов решения задач линейного программирования для всех схем разбиения на жесткие элементы, армирование усилено в областях, близких к вершине купола (вдвое уменьшен шаг арматуры).

Таблица 4.2.2.11			
Схема разбиения на жесткие элементы	Количество жестких элементов	Количество обобщенных линейных разрушения	$\min \mu +$
Рис. 4.2.3	8	15	2.74244524217951
Рис. 4.2.4	9	21	2.24917215491637
Рис. 4.2.5	4	9	3.14615810893931
Рис. 4.2.6	14	27	3.30983676127545
Рис. 4.2.7	13	24	3.61467402033449

Как видно из таблицы 4.2.2.11, минимальная разрушающая нагрузка также достигается для случая разбиения на жесткие элементы, согласно рис. 4.2.4. Влияние усиления армирования на скорости перемещений и поворотов жестких дисков, можно увидеть на рис. 4.2.23, где разными цветами обозначены положения диска 6 до усиления (красный цвет) и после усиления (синий цвет). Заметим, что скорость перемещения этого диска уменьшилась. Увеличение несущей способности купола, определяемое согласно нашей методике, составило 14.5%.

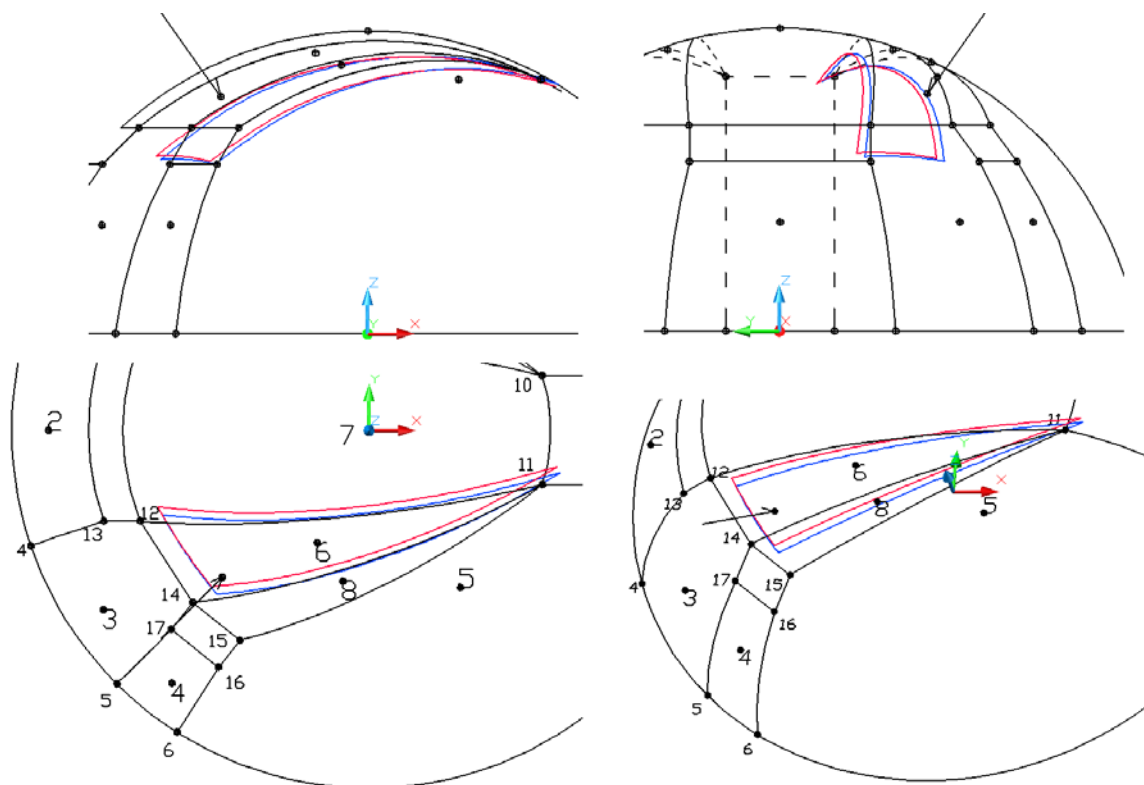


Рис. 4.2.23

4.2.3. Вариант усиления купола увеличением диаметра арматуры

Рассмотрим определение несущей способности этого же купола, усиленного в областях, близких к вершине. В этот раз добьемся усиления увеличением диаметра арматуры. В областях, близких к вершине (например, в точках №№ 9-12, 14, 15, 18, 19 для схемы разрушения на рис 4.2.4), вместо арматуры диаметром 10 мм установим арматуру диаметром 15 мм. В этом случае, поверхность прочности для слоев 2 и 4 определяется уравнением:

$$0.442\sigma_{xx}^2 - 0.295\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 17.45.6\sigma_{yy}^2 + 0.1838\sigma_{xx} + 8.22\sigma_{yy} + 59.67(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 1,$$

МПа². На рис. 4.2.24 приведены сечения гиперповерхностей прочности координатными плоскостями $T_{11}OT_{22}$ (а), $M_{11}OM_{22}$ (б), $Q_{31}OQ_{32}$ (в), $T_{12}OM_{21}$ (г) до усиления армирования (сплошные линии), после уменьшения шага арматуры (штрихпунктирные линии), после увеличения диаметра арматуры (штриховые линии).

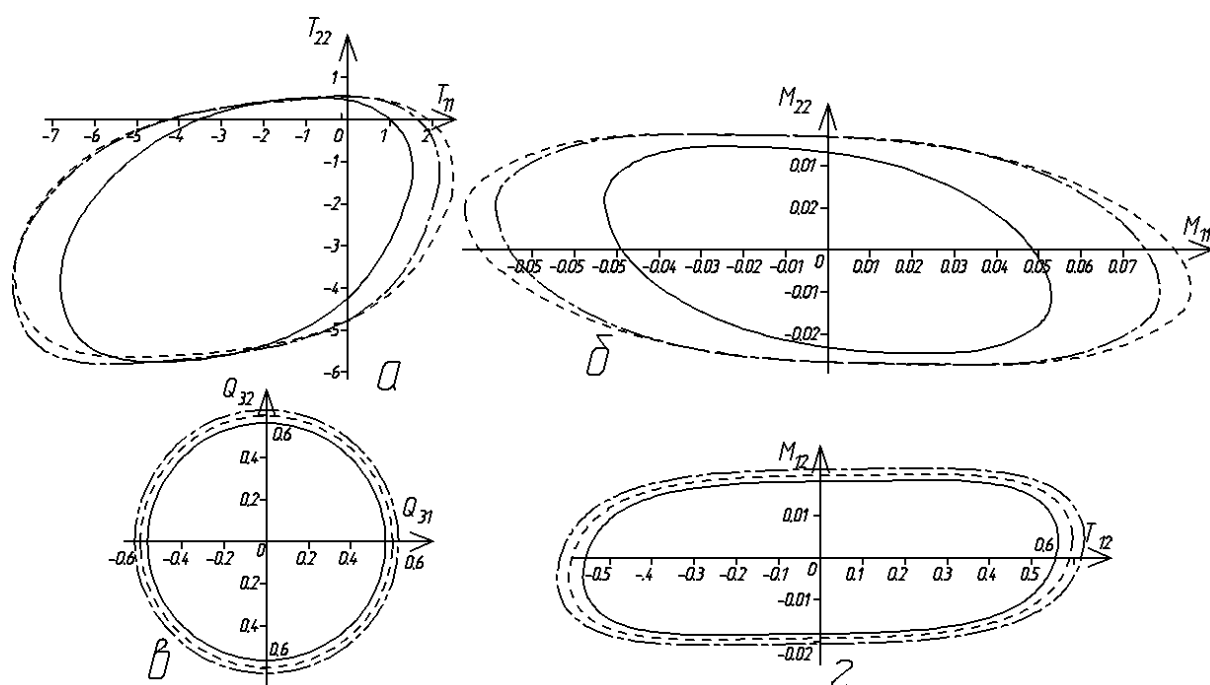


Рис. 4.2.24

Определим разрушающую нагрузку для рассматриваемой конструкции. В таблицах 4.2.3.1-4.2.3.10 представлены результаты решения соответствующих задач линейного программирования. Для схемы на рис. 4.2.3:

Таблица 4.2.3.1

min $\mu^+ = 2.76211399191712$						
№ диска	v_x , м/с	v_y , м/с	v_z , м/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹
1	0.09504	0.20988	0.05911	-0.09459	0.04283	0
2	0.01668	-0.00527	0.00291	0.00321	0.00113	-0.0164
3	-0.42459	-0.35301	0.07412	0.05411	-0.17242	-0.51254
4	-0.0447	-0.31641	0.13216	0.2973	0.2389	0.61675
5	0.14401	-0.31803	0.02049	0.15158	0.06864	0
6	0.2694	-0.31399	-0.90024	1.12033	0.0093	0.14998
7	0.13217	-0.13365	-0.19236	0.5603	-0.03311	0.08471
8	-0.31092	0.95942	-0.19617	-2.76663	-1.36431	-0.39496

Таблица 4.2.1.2

Скорости диссипации		
№ линии, i	N_{i1} , МН/с	N_{i2} , МН/с
1: 2-1	0	0
2: 8-2	0.292954749	0
3: 3-8	0	0.015882413
4: 4-3	0.376791489	0.001176049
5: 5-4	0.014032786	0.252804161
6: 6-5	0	0
7: 7-6	0.074449186	0.103509062
8: 3-22	0.151446104	0.012045427
9: 13-4	0.192524222	0.120903955

10: 17-5	0.039577808	0.015841548
11: 16-6	0.02565925	0.010814931
12: 9-10	0.009964906	0.010263795
13: 12-11	0.137840951	0.085901749
14: 11-14	0.088608811	0.146375598
15: 15-11	0.638147013	1.245518531

Соответствующие схема разрушения (слева) и эпюра скоростей диссипации (справа) приведены на рис. 4.2.25.

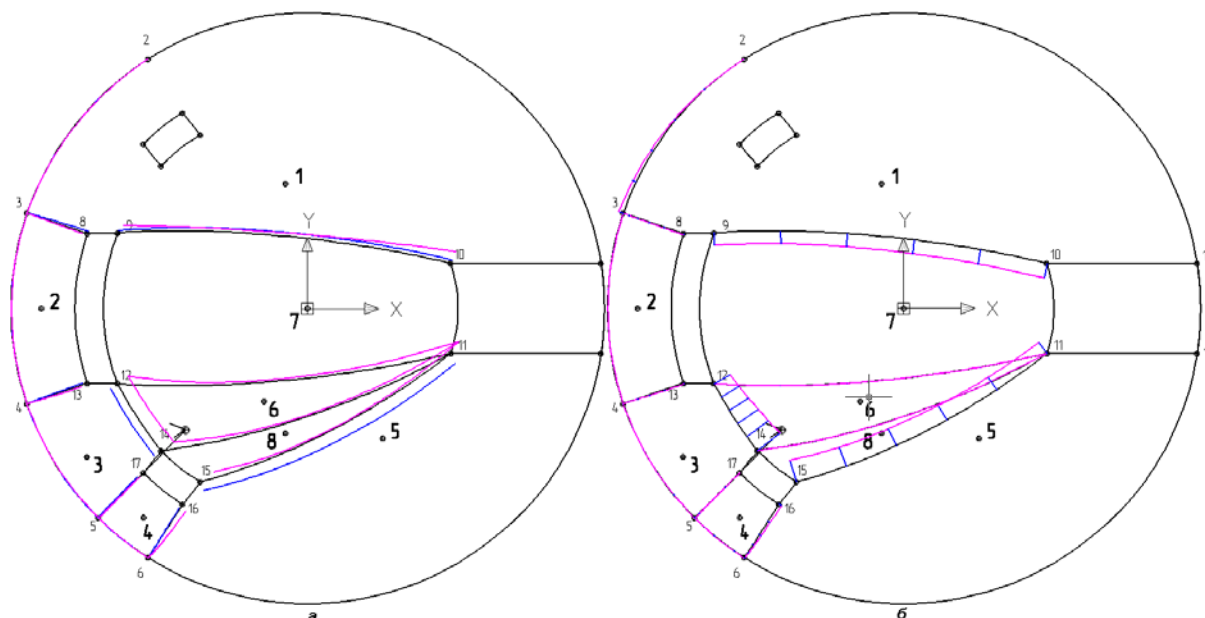


Рис. 4.2.25

Для схемы на рис. 4.2.5:

Таблица 4.2.3.3

min $\mu=2.1449531218432$						
№ диска	$v_x, \text{ м/с}$	$v_y, \text{ м/с}$	$v_z, \text{ м/с}$	$\omega_x, \text{ с}^{-1}$	$\omega_y, \text{ с}^{-1}$	$\omega_z, \text{ с}^{-1}$
1	0.23441	0.55857	0.19315	0.1508	-0.0868	0.06474
2	-6.6E-06	5.4E-06	-2E-05	4E-06	0.00011	2.4E-06
3	2.4E-05	-0.0001	1.6E-05	5E-06	-5E-05	-0.00012
4	4.4E-05	-0.0003	5.9E-05	0.0002	-1E-05	8E-05
5	0.02398	-0.0524	0.00339	0.025	0.01132	9E-06
6	0.42409	0.17466	-0.4817	0.9423	-0.0503	0.15482
7	0.28591	0.50157	-0.0206	0.1994	-0.1025	0.07076
8	-0.13018	0.64686	-0.1043	-1.3794	-0.8028	-0.25314
9	0.23865	0.50692	0.12026	0.1993	-0.1025	0.07074
10	7.1E-05	0.00013	1.1E-05	-3E-05	2.8E-05	1.5E-05
11	9.5E-05	6.5E-05	-1E-06	2E-05	6.5E-05	0.00012
12	0.31523	0.69622	0.04486	-0.3318	0.15023	1.9E-06

Таблица 4.2.3.4

Скорости диссипации		
---------------------	--	--

№ линии, i	N_{i1} , МН/с	N_{i2} , МН/с
1: 2-1	4.02285E-06	1.04383E-06
2: 8-2	4.93785E-05	8.5616E-05
3: 3-8	6.55602E-05	3.04339E-05
4: 4-3	1.05268E-05	1.30057E-05
5: 5-4	5.68047E-05	0
6: 6-5	4.68193E-05	0.000117322
7: 7-6	3.2222E-05	5.79471E-05
8: 3-22	2.45639E-05	3.68398E-05
9: 13-4	7.97302E-05	0.000192808
10: 17-5	5.72068E-05	1.9057E-05
11: 16-6	0.016047189	0.00014262
12: 9-10	1.27099E-06	4.63201E-06
13: 12-11	0.011631922	0.013513176
14: 11-14	0.240535513	0.242563083
15: 15-11	0.145816801	0.078407405
16: 12-14	0.409404707	0.754473529
17: 2-20	0.002918022	0.213646426
18: 21-8	2.33177E-05	1.99966E-05
19: 18-10	0.014648633	0.024204456
20: 10-19	0.001657457	0.001100757
21: 9-19	0.36490167	0.339478691

Соответствующие схема разрушения (слева) и эпюра скоростей диссипации (справа) приведены на рис. 4.2.26.

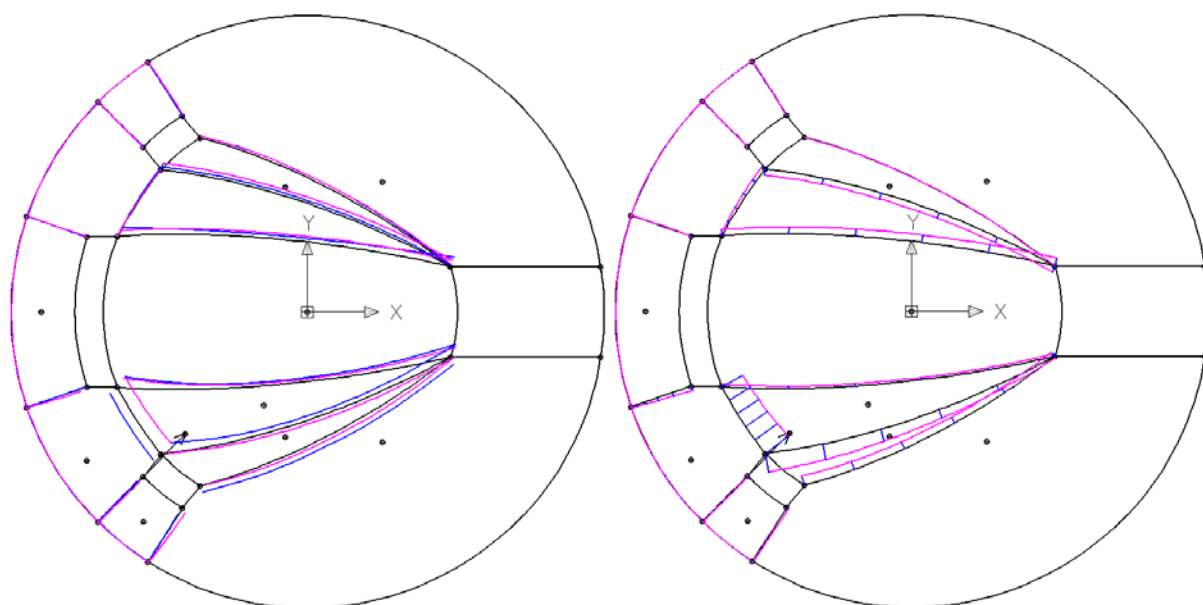


Рис. 4.2.26

Для схемы на рис. 4.2.5:

Таблица 4.2.1.5

$\min \mu^+ = 3.08730839468835$						
№ диска	v_x , м/с	v_y , м/с	v_z , м/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹
1	0.31388	0.49409	-0.1078	0.29408	-0.1652	0.1039
2	0.34076	0.75254	0.04849	-0.3587	0.16241	0

3	0.00363	-0.008	0.00052	0.00382	0.00173	0
4	-0.0887	0	0.00197	0	-0.0814	0

Таблица 4.2.1.6

Скорости диссипации		
№ линии, i	N_{i1} , МН/с	N_{i2} , МН/с
1: 2-1	0	0
2: 3-2	0	0
3: 4-3	0	0
4: 5-2	0.279143717	0.002389482
5: 3-10	0.000605685	0.050521486
6: 9-8	0.73930401	0.590208558
7: 7-6	0.438782627	0.426137065
8: 12-13	0.019775365	0.033207421
9: 14-11	0.384857113	0.689013891

Соответствующие схема разрушения (слева) и эпюра скоростей диссипации (справа) приведены на рис. 4.2.27.

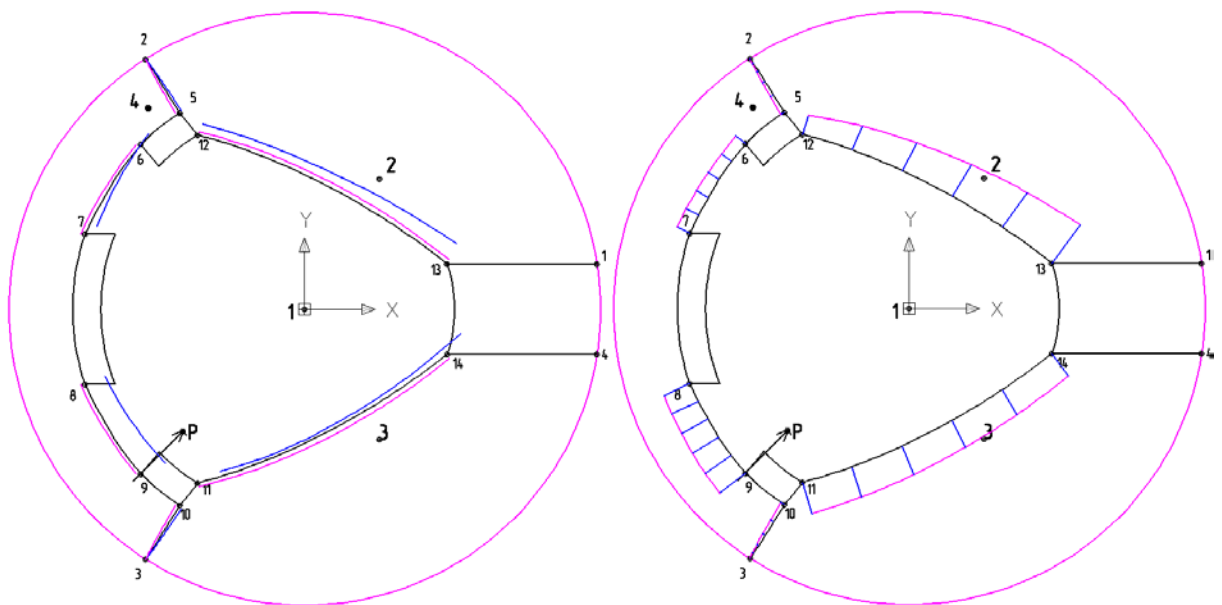


Рис. 4.2.27

Для схемы на рис. 4.2.6:

Таблица 4.2.1.7

$\min \mu^+ = 3.38759140791038$						
№ диска	v_x , М/с	v_y , М/с	v_z , М/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹
1	0.26696	0.60412	0.20367	-0.177	0.15807	-0.0694
2	0.10013	0.29339	0.06255	-0.1711	-0.043	0.20732
3	0.01965	-0.0035	-0.0026	0.00105	0.00903	-0.0051
4	0.01034	-0.0014	0.00056	0.0017	0.00191	-0.0046
5	0.00471	-0.0008	9.9E-05	0.00049	0.00256	-0.0025
6	-0.039	-0.0333	0.00641	0.00311	-0.0134	-0.0509
7	-0.0091	-0.025	0.01078	0.02423	0.02244	0.0707
8	-0.0018	-0.0061	0.00131	0.00677	-0.002	-7E-09

9	0.03794	-0.0442	0.02141	0.02108	0.01808	0
10	0.19663	0.2849	-0.1157	0.50814	-0.126	0.06628
11	0.27174	0.70135	0.39953	-0.2965	0.25155	-0.0643
12	0.13401	0.22129	0.38786	0.79221	-0.1491	0.09972
13	0.27217	0.40659	-0.6021	0.37741	-0.1396	0.05018
14	0.11874	0.34128	-0.4314	0.04602	-0.3436	-0.114

Таблица 4.2.1.8

Скорости диссипации		
№ линии, i	N _{i1} , МН/с	N _{i2} , МН/с
1: 2-1	0.159327038	0.059396996
2: 3-2	0.084585879	0.169128352
3: 4-3	0.004491592	0.005609673
4: 5-4	0.002654012	0.004489051
5: 6-5	3.90968E-08	0.002436897
6: 7-6	0.037541514	9.15815E-08
7: 8-7	0.000329757	0.027236308
8: 9-8	2.87292E-09	3.00502E-09
9: 10-9	0	0
10: 24-2	0.007758098	0.007522361
11: 11-3	0.151353578	0.049558663
12: 12-4	0.003776656	7.96559E-05
13: 13-5	1.86384E-05	0.001612281
14: 14-6	0.013509807	0.00118155
15: 15-7	0.016066213	0.009975369
16: 16-8	0.001809631	0.001834446
17: 25-9	0.019722582	0.000214501
18: 23-24	0.017742806	0.010029182
19: 24-17	0.009631473	0.217463329
20: 23-18	0.039311466	0.023774756
21: 18-19	0.395803736	0.371504039
22: 19-23	0.004500936	0.005253576
23: 26-20	0.002501378	0.002124516
24: 20-21	0.554281012	0.720867872
25: 26-21	0.202960733	0.081241776
26: 25-26	0.306904859	0.113932921
27: 22-25	0.544833314	0.295127914

Соответствующие схема разрушения (слева) и эпюра скоростей диссипации (справа) приведены на рис. 4.2.28.

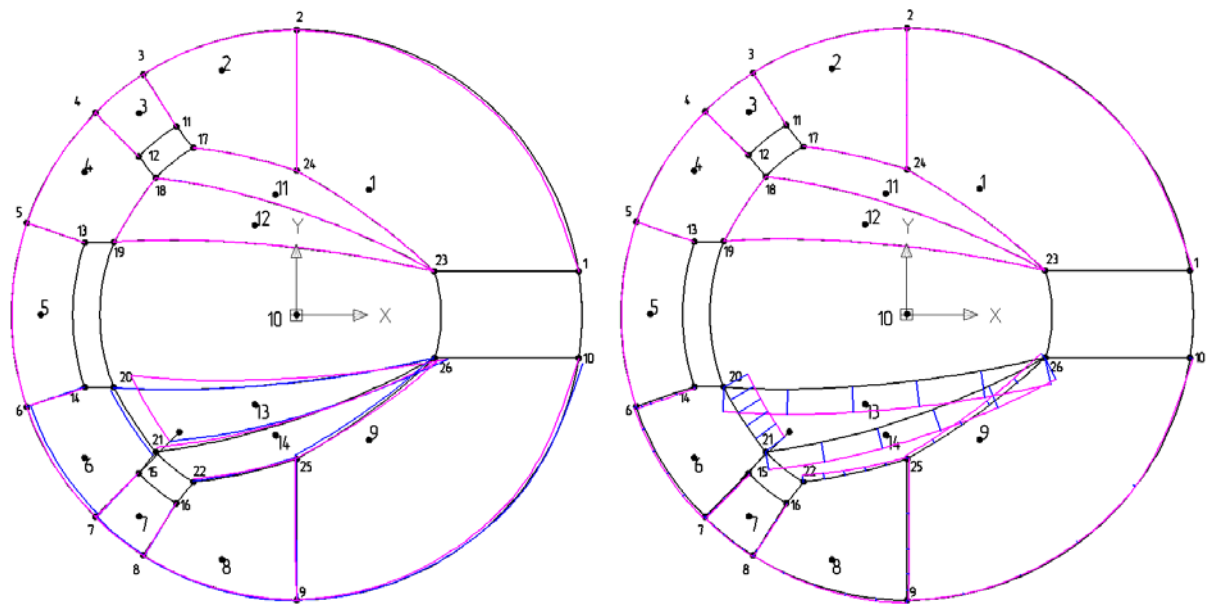


Рис. 4.2.28

Для схемы на рис. 4.2.7:

Таблица 4.2.1.9

min $\mu^+ = 3.546652402151$						
№ диска	v_x , м/с	v_y , м/с	v_z , м/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹
1	0.30228	0.53244	0.19225	-0.1668	0.15097	-0.0632
2	0.14163	0.24921	0.06353	-0.1601	-0.0282	0.1797
3	0.09994	-0.0389	0.00249	0.01806	0.01824	-0.0462
4	0.06029	-0.003	0.00892	0.00945	0.0246	-0.0729
5	2.1E-06	1.6E-06	-2E-07	-5E-07	5.7E-07	-5E-07
6	-2E-07	8E-09	-2E-07	-1E-07	5.7E-07	-2E-06
7	3.8E-07	-3E-07	4E-08	-8E-08	2.8E-07	1.3E-06
8	8.4E-07	-1E-06	5.5E-07	-1E-07	-3E-07	-1E-07
9	6.1E-07	-2E-06	1.4E-07	9.1E-07	2.8E-07	0
10	0.27004	0.23994	-0.0932	0.45426	-0.191	0.10521
11	0.30509	0.61417	0.36477	-0.2956	0.17287	-0.0186
12	0.17982	0.13919	0.34053	0.76268	-0.2159	0.14141
13	0.39126	0.35091	-0.5466	0.28795	-0.2082	0.08474

Таблица 4.2.1.10

Скорости диссипации		
№ линии, i	N_{i1} , МН/с	N_{i2} , МН/с
1: 2-1	0.129144166	0.032735941
2: 3-2	0.110338657	0.137663016
3: 4-3	0.032529629	0.041270254
4: 5-4	0.025797116	0.032421611
5: 6-5	1.32122E-06	5.33935E-08
6: 7-6	6.06111E-07	1.71412E-06
7: 8-7	5.04847E-07	6.46938E-07
8: 9-8	0	0
9: 24-2	0.009404864	0.006613709

10: 11-3	0.137958492	0.026311626
11: 12-4	0.001800124	0.000691491
12: 13-5	0.008171276	0.023221604
13: 14-6	8.68382E-07	1.02294E-06
14: 15-7	8.72624E-07	9.37696E-09
15: 16-8	9.85522E-07	5.26194E-08
16: 23-24	0.110604257	0.01136297
17: 24-17	0.011197905	0.142178617
18: 23-18	0.038173668	0.023130684
19: 18-19	0.318749594	0.314339675
20: 19-23	0.004881572	0.005696967
21: 10-20	0.003181531	0.002701015
22: 20-21	0.596624049	0.677519575
23: 21-10	0.661333069	0.375292069
24: 10-22	8.21439E-08	1.86606E-07

Соответствующие схема разрушения (слева) и эпюра скоростей диссипации (справа) приведены на рис. 4.2.29.

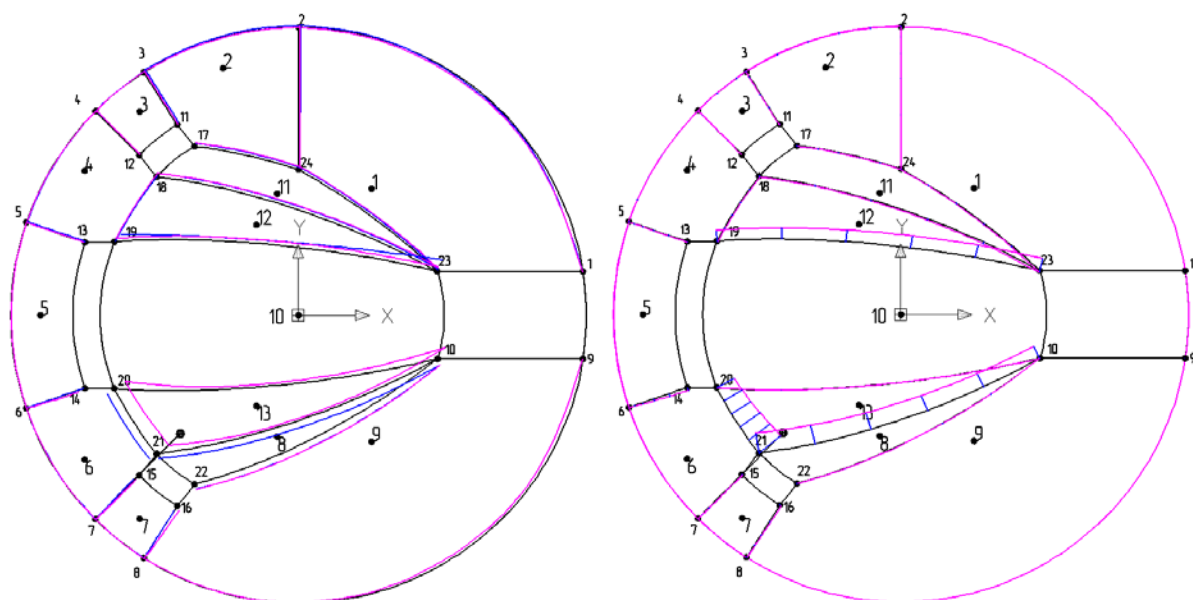


Рис. 4.2.29

Приведем сводную таблицу 4.2.3.11 результатов решения задач линейного программирования для всех схем разбиения на жесткие элементы, армирование усилено в областях, близких к вершине купола (диаметр арматуры принят 15 мм).

Таблица 4.2.3.11			
Схема разбиения на жесткие элементы	Количество жестких элементов	Количество обобщенных линий разрушения	min $\mu+$
Рис. 4.2.3	8	15	2.76211399191712
Рис. 4.2.4	9	21	2.1449531218432
Рис. 4.2.5	4	9	3.08730839468835
Рис. 4.2.6	14	27	3.38759140791038
Рис. 4.2.7	13	24	3.546652402151

Как видно из таблицы 4.2.3.11, минимальная разрушающая нагрузка также достигается для случая разбиения на жесткие элементы, согласно рис. 4.2.4. Увеличение несущей способности по сравнению с вариантом с равномерным армированием, составило 10.34%. Причем усиление армирования увеличением диаметра арматуры (площадь арматуры увеличилась в 2.25 раза, процент армирования 2.62%) оказалось менее эффективным, чем усиление уменьшением шага арматуры (шаг был уменьшен вдвое, процент армирования 2.94%). На рис. 4.2.30 показаны проекции на плоскость XOY контуров жесткого элемента №6 после 0.15 сек с начала разрушения, где красными линиями обозначены контур, полученный для случая равномерного армирования, синими – после усиления армирования увеличением диаметра арматуры. Черным цветом обозначены контуры жестких элементов до разрушения. Как видно из рисунка, достигнуто некоторое уменьшение скоростей деформирования.

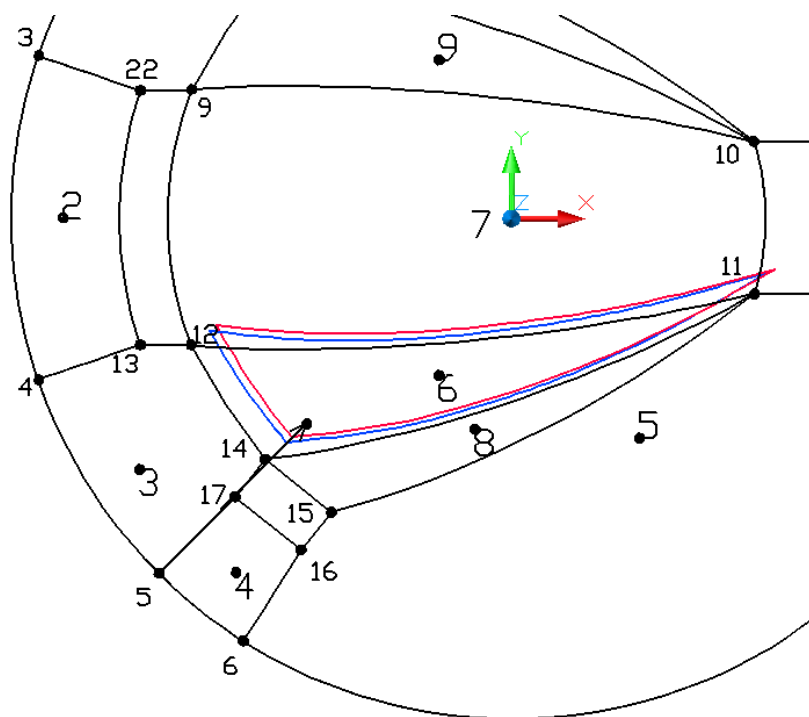


Рис. 4.2.30

Приведем сводную таблицу 4.2.3.12 результатов решения задач линейного программирования для следующих вариантов армирования: до усиления в верхней зоне купола, после уменьшения шага арматуры в верхней зоне купола до 50 мм, после увеличения диаметра арматуры в верхней зоне купола до 15 мм:

Таблица 4.2.3.12

Схема разбиения на жесткие элементы	min μ^+ , без усиления	min μ^+ , шаг 50 мм.	% увеличения несущей способности	min μ^+ , диаметр 15 мм.	% увеличения несущей способности
Рис. 4.2.3	2.60427	2.74245	5.04%	2.76211	5.71%
Рис. 4.2.4	1.92315	2.24917	14.50%	2.14495	10.34%
Рис. 4.2.5	3.03946	3.14616	3.39%	3.08731	1.55%
Рис. 4.2.6	3.1147	3.30984	5.90%	3.38759	8.06%
Рис. 4.2.7	3.5164	3.61467	2.72%	3.54665	0.85%

Итак, в результате решения задачи о несущей способности купола, получили верхние оценки разрушающей нагрузки, схемы разрушения, эпюры скоростей диссипации для пяти различных вариантов разбиения на жесткие элементы. Согласно полученным схемам разрушения и эпюрам скоростей диссипации определили, что наибольшая интенсивность разрушения при рассматриваемой нагрузке развивается в верхней зоне купола, а наилучшее приближение сверху для μ^+ достигается для варианта разбиения на рис. 4.2.4. Учитывая это, произвели в верхней зоне два типа усиления: 1) уменьшили шаг арматуры вдвое; 2) увеличили диаметр до 15 мм. В результате получили еще 10 задач линейного программирования, и соответствующие 10 значений разрушающей нагрузки для двух вариантов армирования купола. Для равномерного армирования несущая способность составила 1.9231494 МН. Для усиленной уменьшением шага арматуры в верхней зоне купола – 2.24917 МН (увеличение несущей способности составило 14.5% по сравнению с равномерным армированием). Для усиленной увеличением диаметра арматуры в верхней зоне купола – 2.14495 МН (несущая способность увеличилась на 10.34% по сравнению со случаем с равномерным армированием).

4.2.4. Вариант с жестким защемлением в опоре

Произведем расчет несущей способности этого же купола, но с жестким защемлением в опоре. Для каждого из вариантов разрушения произведем определение коэффициентов задачи линейного программирования. Отличия будут иметь место в опорных линиях. Если для шарнирного опирания в ограничениях, соответствующих опорным линиям, не учитывались внутренние моменты M_α и N_α , то для жесткого защемления данное упрощение не применяется.

Произведем расчет несущей способности каждого из вариантов разбиения

(рис. 4.2.3-4.2.7) сферического жестко опертого купола с вырезами, материал одинаковый во всех точках купола. Минимальная разрушающая нагрузка получена для схемы разрушения, приведенной на рис 4.2.4. В таблицах 4.2.4.1, 4.2.4.2 приведены соответствующие результаты для этого варианта.

Таблица 4.2.4.1

min $\mu=1.96647328156972$						
№ диска	v_x , м/с	v_y , м/с	v_z , м/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹
1	0.22996	0.58924	0.20069	0.13804	-0.0862	0.05991
2	9.2E-10	-4E-10	0	-4E-10	-2E-09	-5E-09
3	-1E-09	-1E-09	3.9E-10	7.6E-10	-2E-09	-7E-10
4	0.00042	0.00012	-4E-05	0.00038	0.00019	0.00102
5	0.0206	-0.0423	0.00283	0.02043	0.00927	-4E-05
6	0.41822	0.13252	-0.4592	1.09926	-0.0275	0.16918
7	0.27831	0.5505	0.02718	0.16002	-0.0935	0.06267
8	-0.3114	0.81505	-0.1289	-1.9691	-0.9938	-0.2939
9	0.23695	0.55227	0.13544	0.16002	-0.0935	0.06267
10	0.00351	0.00418	-0.0012	0.0059	0.00275	0.02071
11	3E-08	4.3E-08	2.5E-10	0	1.7E-08	4.8E-08
12	0.3114	0.72239	0.05032	-0.3427	0.15451	-0.0063

Таблица 4.2.4.2

Скорости диссипации		
№ линии, i	N_{i1} , МН/с	N_{i2} , МН/с
1: 2-1	0.010392611	0.010375635
2: 8-2	0.000319716	0.007136032
3: 3-8	2.55334E-08	2.38904E-08
4: 4-3	1.54826E-10	2.04468E-09
5: 5-4	1.00001E-10	1.83641E-10
6: 6-5	0.00045194	0.000117653
7: 7-6	0.000620491	0.000619162
8: 3-22	1.73801E-08	2.38442E-08
9: 13-4	0	0
10: 17-5	4.99861E-05	8.93972E-05
11: 16-6	0.013409159	0.000156407
12: 9-10	6.41314E-09	6.29159E-09
13: 12-11	0.014734304	0.01305847
14: 11-14	0.243912932	0.232518084
15: 15-11	0.039135979	0.059965095
16: 12-14	0.349410476	0.732397334
17: 2-20	0.002926208	0.21530788
18: 21-8	0.00541115	0.000510517

19: 18-10	0.009431729	0.014423359
20: 10-19	0.000452557	0.000353948
21: 9-19	0.376157716	0.3299618

Соответствующая схема разрушения приведена на рис. 4.2.31; на рис. 4.2.32 приведена соответствующая эпюра скоростей диссипации.

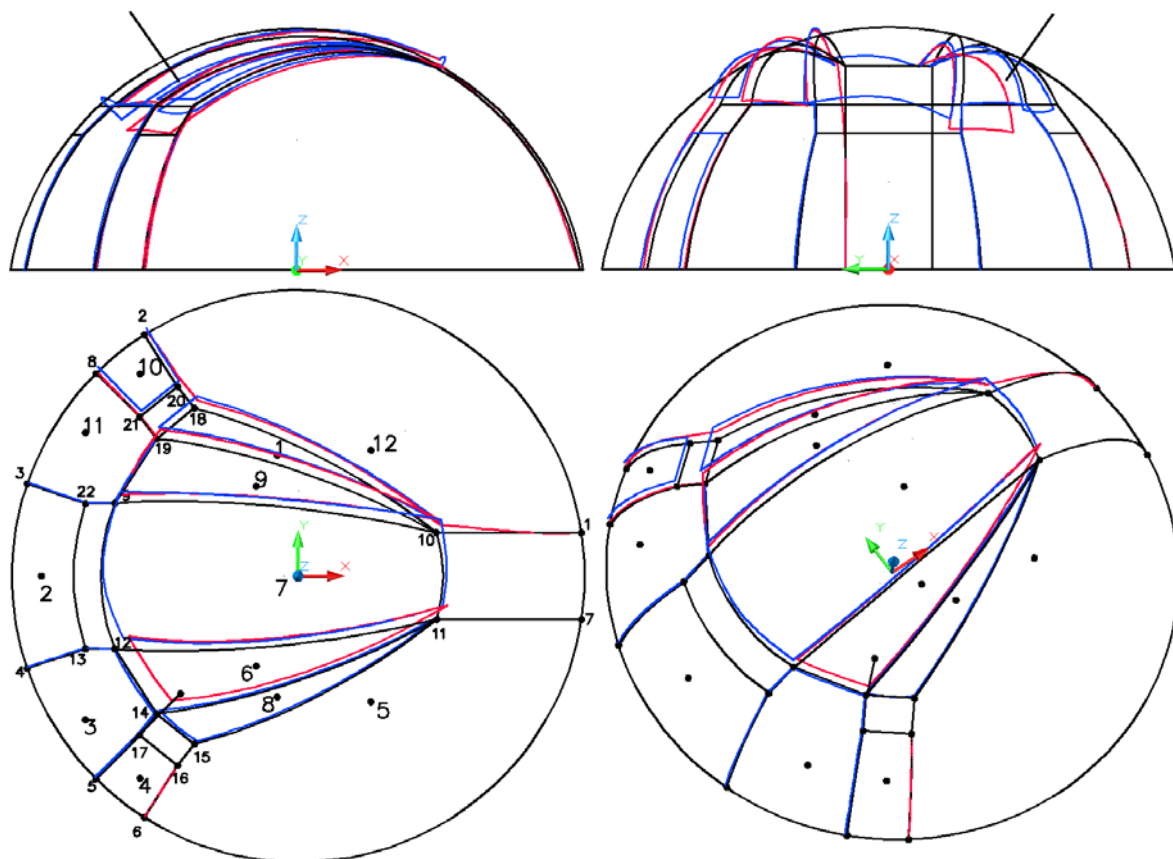


Рис. 4.2.31

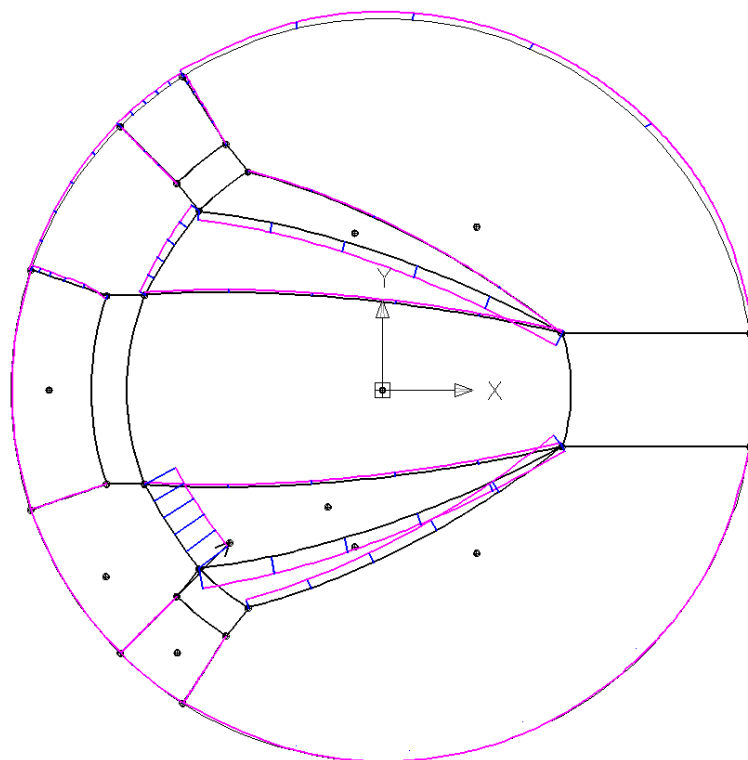


Рис. 4.2.32

В результате решения задачи определения несущей способности жестко защемленного по контуру железобетонного купола с вырезами, нагруженного сосредоточенной силой определенного направления (пункт 4.2), получили верхнюю оценку разрушающей нагрузки, равную 1.966473 МН, что на 2.2% больше, чем разрушающая нагрузка для аналогичного шарнирно опертого купола. Сравнивая рисунки 4.2.11 и 4.2.32, можно наблюдать перераспределение скоростей диссипации внутренней энергии для шарнирного и жесткого вариантов опирания купола. При жестком защемлении, в опоре появляется диссипация внутренней энергии, которая для шарнирной опоры отсутствовала, уменьшились скорости диссипации для линий в верхней части купола. Как и следовало ожидать, при жестком защемлении краев оболочки, ее несущая способность увеличилась (по сравнению с шарнирным опиранием).

4.2.5. Вариант с вертикальной нагрузкой (шарнирное опирание)

Произведем определение разрушающей нагрузки того же купола, приняв вертикальное направление внешней нагрузки. Для определения минимальной нагрузки из возможных, произведем расчеты для всех пяти вариантов разбиения на

жесткие диски (рис. 4.2.3-4.2.7). Нами было получено, что для варианта на рис. 4.2.4 (вариант №2) имеет место минимальная разрушающая нагрузка. В таблицах 4.2.5.1-4.2.5.2 приведены результаты решения соответствующей задачи линейного программирования.

Таблица 4.2.5.1

min $\mu^+ = 4.24393961827386$						
№ диска	$v_x, \text{м/с}$	$v_y, \text{м/с}$	$v_z, \text{м/с}$	$\omega_x, \text{с}^{-1}$	$\omega_y, \text{с}^{-1}$	$\omega_z, \text{с}^{-1}$
1	0.11958	0.27012	0.09953	0.44697	-0.2399	0.12606
2	-0.16	-2E-08	0.02942	9E-09	-0.1626	9.9E-10
3	-0.2137	-0.1309	0.05995	0.13543	-0.2171	-0.0008
4	-0.1184	-0.1292	0.05517	0.15812	-0.1125	0.04365
5	0.25219	-0.5457	0.03485	0.2613	0.11669	-0.0056
6	0.13573	-0.1984	-0.0941	-0.447	-0.2399	-0.1261
7	0.26663	-1E-09	-1	0	-0.0361	-2E-09
8	0.11958	-0.2701	0.09953	-0.447	-0.2399	-0.1261
9	0.13573	0.19844	-0.0941	0.44697	-0.2399	0.12606
10	-0.1184	0.12916	0.05517	-0.1581	-0.1125	-0.0436
11	-0.2137	0.13093	0.05995	-0.1354	-0.2171	0.00079
12	0.25219	0.5457	0.03485	-0.2613	0.11669	0.00559

Таблица 4.2.5.2

Скорости диссипации		
№ линии, i	$N_{i1}, \text{МН/с}$	$N_{i2}, \text{МН/с}$
1: 2-1	0.007984777	0.00782611
2: 8-2	0.010120553	0.010265302
3: 3-8	0.013175394	0.013172721
4: 4-3	0.008128051	0.00812805
5: 5-4	0.01317272	0.013175393
6: 6-5	0.010265302	0.010120553
7: 7-6	0.00782611	0.007984777
8: 3-22	0.003450321	0.081179544
9: 13-4	0.081179523	0.003450311
10: 17-5	0.048851878	0.00144467
11: 16-6	0.189894888	0.00058196
12: 9-10	0.24854895	0.542358625
13: 12-11	0.248548975	0.542358628
14: 11-14	0	0
15: 15-11	0.014039199	0.021339025
16: 12-14	0.542417165	0.280013665
17: 2-20	0.00058196	0.189894886
18: 21-8	0.048851885	0.00144467
19: 18-10	0.014039199	0.021339026
20: 10-19	0	0
21: 9-19	0.542417214	0.280013692

Соответствующая схема разрушения для рассматриваемой конструкции при

случае вертикальной нагрузки, приведена на рис. 4.2.33. Черные линии здесь – границы жестких дисков до разрушения, красные или синие – границы тех же жестких дисков в процессе разрушения. На рис. 4.2.34 приведена эпюра скоростей диссипации.

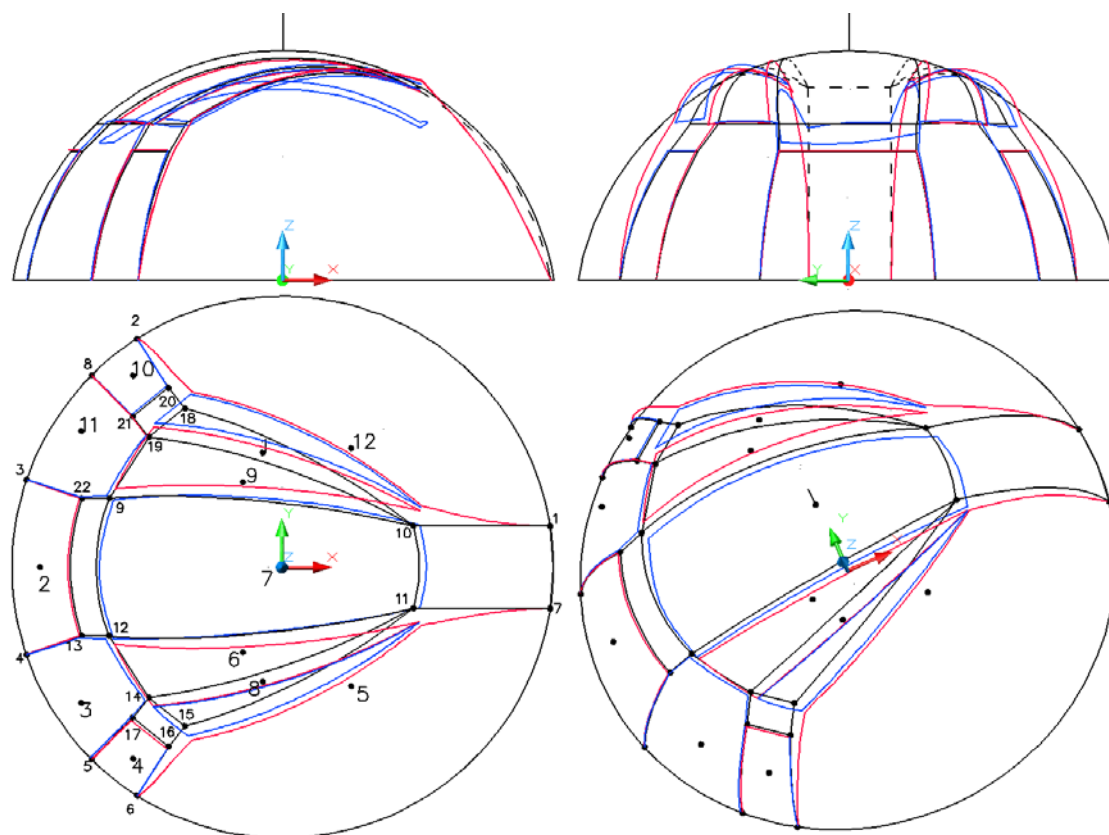


Рис. 4.2.33

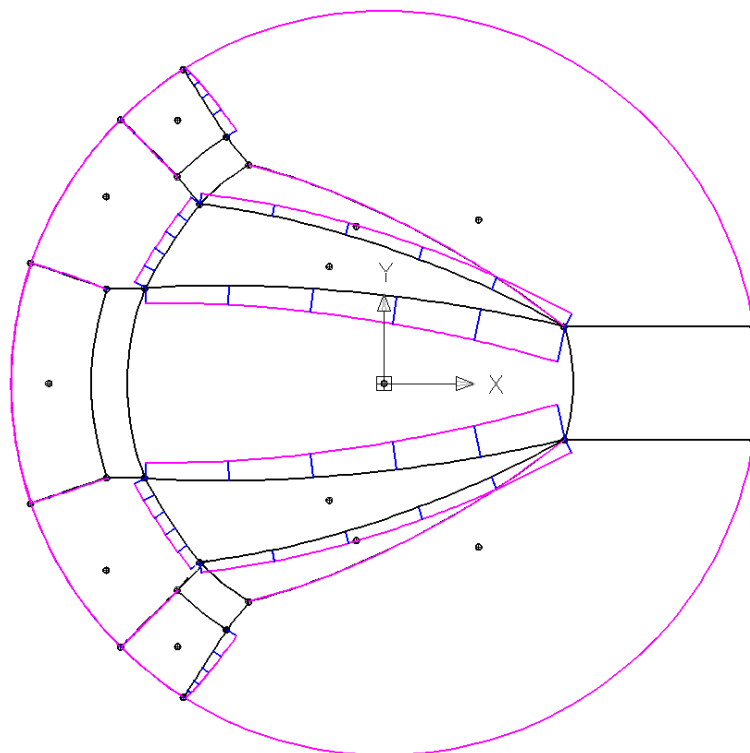


Рис. 4.2.34

В результате решения задачи определения несущей способности шарнирно-неподвижно опертого железобетонного купола с вырезами, нагруженного вертикальной сосредоточенной нагрузкой в вершине, получили верхнюю границу разрушающей нагрузки, равную 4.24394 МН, что на 120% больше, чем разрушающая нагрузка для аналогичного купола, нагруженного сосредоточенной силой, действующей сбоку (см. раздел 4.2.1). Согласно соответствующей схеме разрушения и эпюре скоростей диссипации, определили, что наибольшая интенсивность разрушения так же имеет место в верхней части купола.

4.2.6. О рациональном армировании конструкции

Еще раз покажем влияние армирования оболочки на результаты. Для этого сравним верхние оценки разрушающей нагрузки, варьируя диаметр арматуры в зоне, наиболее удаленной от точки приложения нагрузки. Определим несущую способность купола после уменьшения диаметра арматуры в районе диска № 12, рис. 4.2.4. Схему разбиения на жесткие элементы переделаем следующим образом. Каждый из дисков 5 и 12 (рис. 4.2.4) разделим на 2 диска, получим новые линии разрушения (рис. 4.2.35).

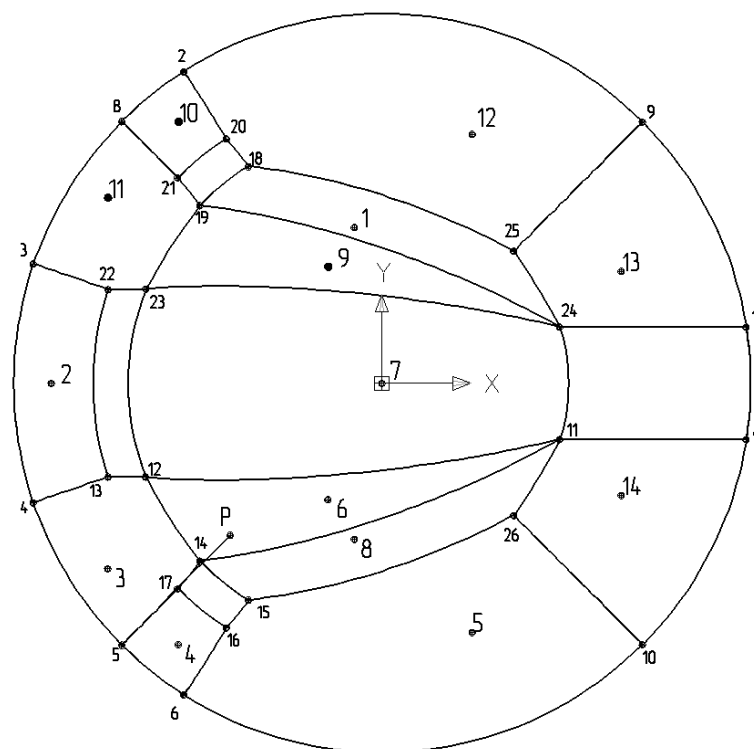


Рис. 4.2.35

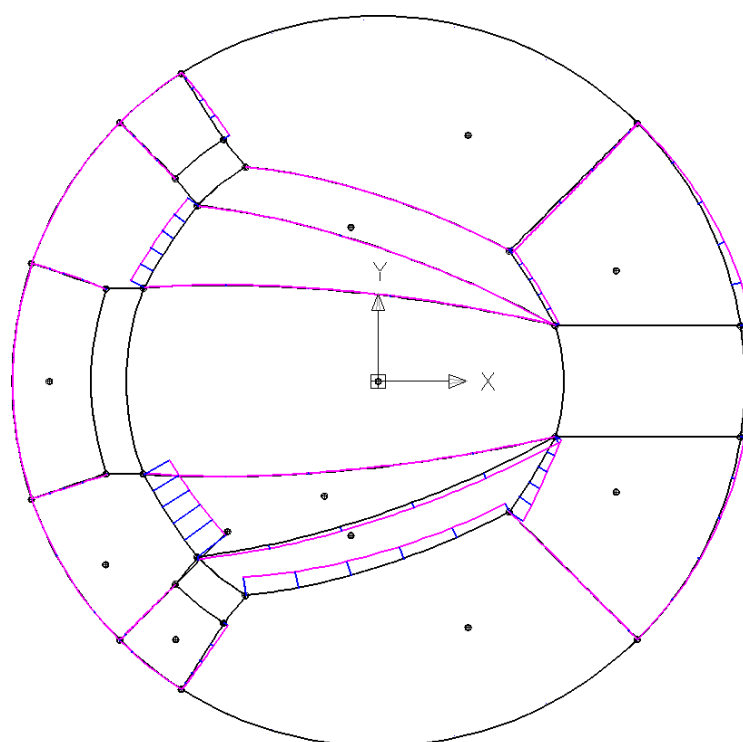


Рис. 4.2.36

На рис. 4.2.36 приведена эпюра скоростей диссипаций для соответствующей схемы разбиения на жесткие элементы.

В зоне, куда входят точки 1, 7, 9, 11, 24, 25 (рис. 4.2.35) примем диаметр арма-

туры равным 5 мм (т. е. уменьшив диаметр арматуры). Определим координаты вершин аппроксимирующей гиперповерхности прочности для соответствующих точек оболочки.

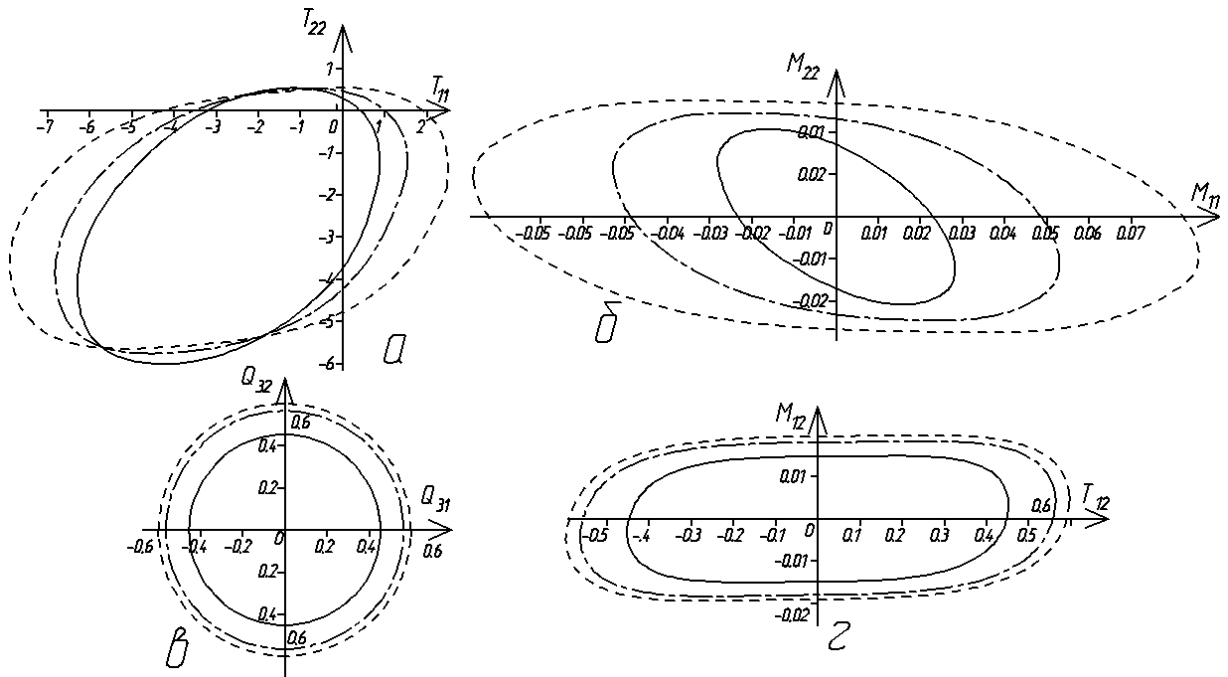


Рис. 4.2.37

На рис. 4.2.37 приведены сечения гиперповерхностей прочности для любой из этих точек плоскостями $T_{11}OT_{22}$, $M_{11}OM_{22}$, $Q_{32}OQ_{32}$ и $T_{12}OM_{12}$: диаметр 10 мм (штрихпунктирная линия), диаметр 5 мм (сплошная линия, поверхность прочности уравнением: $0.797\sigma_{xx}^2 - 0.2787\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 17.45.6\sigma_{yy}^2 + 0.1838\sigma_{xx} + 8.22\sigma_{yy} + 70.41(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 1$, МПа²), диаметр 15 мм (штриховая линия, поверхность прочности для слоев 2 и 4 определяется уравнением $0.442\sigma_{xx}^2 - 0.295\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 17.45.6\sigma_{yy}^2 + 0.1838\sigma_{xx} + 8.22\sigma_{yy} + 59.67(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 1$, МПа²). Соответствующая разрушающая нагрузка (арматура в зоне, наиболее удаленной от точки приложения силы, диаметром 5 мм) составила 2.21198 МН; схема разрушения приведена на рис. 4.2.38.

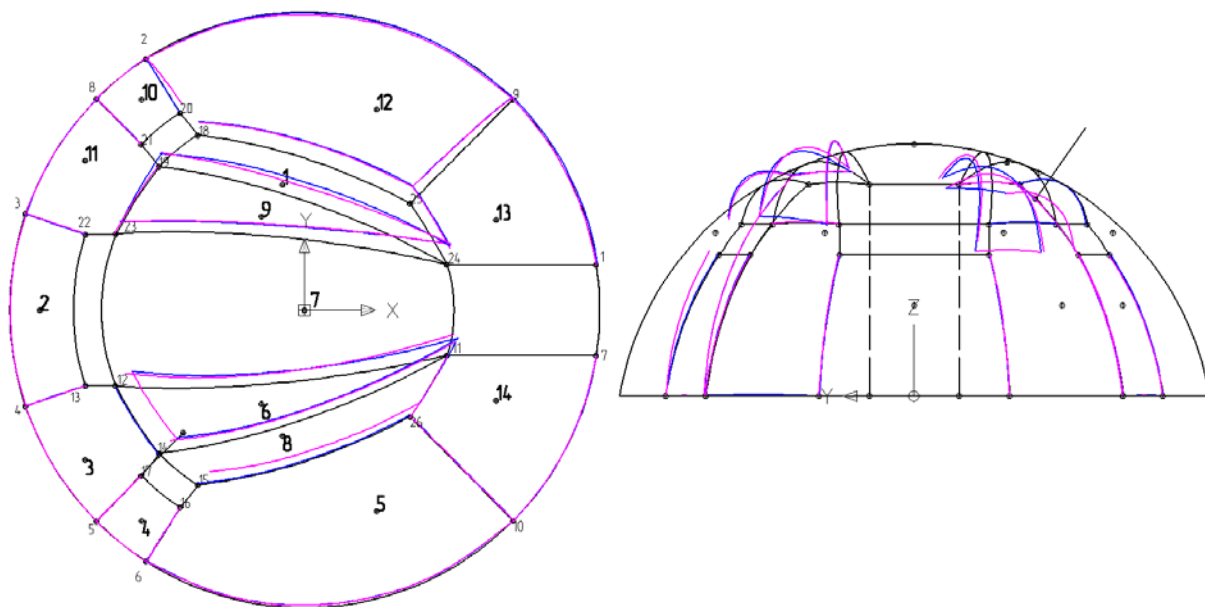


Рис. 4.2.38

Теперь в зоне, куда входят точки 11, 12, 14, 15, 18, 19, 23-26 (рис. 4.2.35), где имеют место значительные скорости диссипации внутренней энергии (рис 4.2.38), вместо арматуры диаметром 10 мм, установим арматуру диаметром 15 мм. Для этого материала построим сечения гиперповерхности прочности плоскостями $T_{11}OT_{22}$, $M_{11}OM_{22}$, Q_1OQ_2 и $T_{12}OM_{12}$ (на рис. 4.2.37 приведены соответствующие сечения – пунктирные линии). Соответствующая разрушающая нагрузка составила 2.93861 МН. На рис. 4.2.39 приведена соответствующая схема разрушения купола. Как видно из схемы, достигнуто уменьшение скоростей перемещений и поворотов жестких элементов.

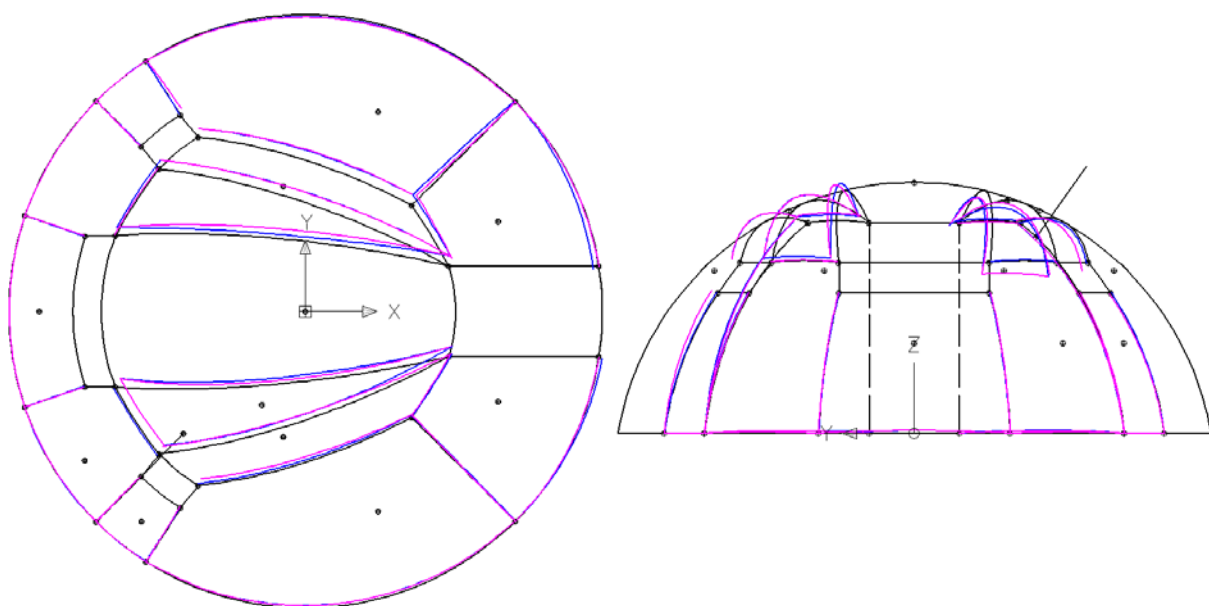


Рис. 4.2.39

Отметим, что при равномерном армировании материала, с арматурой диаметром 10 мм, с шагом 100 мм, разрушающая нагрузка для схемы разрушения на рис. 4.2.35 составила 2.6698 МН. Следовательно, в этом разделе мы показали, что μ^+ зависит не только от схемы разбиения на жесткие элементы, но и от характера армирования материала.

Исходя из начальной схемы разрушения, соответствующей равномерному армированию, можно дать рекомендации по усилению тех зон конструкции, где имеет место значительная скорость диссипации внутренней энергии. В итоге можно добиться рационального армирования рассматриваемой конструкции.

Заключение

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Разработана уточненная методика определения несущей способности тонких армированных пластин и оболочек на основе теории предельного равновесия. Эта методика позволяет решать рассматриваемые задачи при следующих исходных условиях и требованиях:

- оболочки и пластины могут иметь сложную геометрическую форму, в том числе – изломы по некоторым линиям, внутренние и внешние (около краев) произвольные вырезы;

- допускаются к рассмотрению всевозможные краевые условия (условия опирания) оболочек и пластин;

- статическая внешняя нагрузка может иметь произвольную конфигурацию;

- в общем случае методика позволяет учет работы всех внутренних силовых факторов;

- методика позволяет учитывать произвольный характер армирования материала (единственное ограничение – арматура должна располагаться «параллельно» поверхности приведения S_0).

В качестве примера оболочек из армированных материалов рассмотрены железобетонные оболочки.

2. Построены уточненные кривые прочности для армированных материалов.

3. Созданы эффективные алгоритмы, позволяющие реализовать разработанную методику определения верхней оценки несущей способности тонких (армированных и неармированных) пластин и оболочек.

4. Разработан и реализован комплекс соответствующих программ для ЭВМ, получены численные результаты расчетов, произведено сравнение этих результатов с соответствующими известными результатами (в том числе – экспериментальными), показана достоверность численных результатов.

Основные выводы диссертации заключаются в следующем:

1. Разработанные методика, алгоритмы, программы для ЭВМ позволяют ре-

шать реальные, с точки зрения практики проектирования, задачи расчета на прочность тонких армированных и неармированных пластин и оболочек, получать численные результаты, удовлетворительно согласующиеся с соответствующими экспериментальными и расчетными результатами других авторов.

2. Уточнение решений (по сравнению с имеющимися аналогичными методиками) достигается за счет: учета работы всех внутренних усилий; уточнения сечений используемых гиперповерхностей прочности; уточнения механизма разрушения путем варьирования количества и положений обобщенных линий разрушения конструкции.

3. Использование параметрических уравнений (2.2.11) позволяет учитывать работу всех внутренних усилий. Математические соотношения упрощаются, а задачи, которые могут быть решены с их использованием, могут иметь более сложный характер, чем решаемые известными аналогичными методиками. Упрощается внешний вид основных соотношений, они становятся алгоритмичными, ориентированными на использование современных ЭВМ. Облегчается учет различных условий опирания конструкции.

Литература

1. Александров С.Е. О разрывных полях скоростей при произвольном деформации идеального жесткопластического тела // Доклад АН (Россия). – 1992. -324, №4. – С. 769-772.
2. Алифанов Л. А. Расчет железобетонных плит статическим методом предельного равновесия // Вестник КГТУ. Транспорт.- 2001. (Вып. 25.) С. 150–155.
3. Анищенко Е. Ю. Исследование, проектирование и оптимизация параметров фундаментов каркасных зданий. / Анищенко Е. Ю., Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т, Волгоград .— Южно-Российский государственный технический университет (Новочеркасский политехнический институт), 346428, Ростовская обл., г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132 .— 23 с. : ил. — В04659743 .— Гидрогеология. Инженерная геология. Мерзлотоведение .— 2005 .— N 06.
4. Ахвледиани Н.В., К расчету железобетонных оболочек вращения по предельному равновесию // Сообщения АН Груз ССР, 18 (1957). С. 205—210.
5. Ахвледиани Н.В., О несущей способности пологих железобетонных оболочек двойной кривизны // Исследования и теория сооружений, т. 11. - 1962. - С. 253—259.
6. Ахвледиани Н.В., Шайшмелашвили В.Н., О расчете несущей способности оболочек // Сообщения АН Груз ССР, 13 (1952).
7. Ахвледиани Н.В., Шайшмелашвили В.Н., Расчет разрушающих нагрузок оболочек двойной кривизны // Труды института строительного дела АН Груз ССР, т 5. - 1955. - С. 61—71.
8. Базлов В.Н. Несущая способность оболочек вращения при осесимметричном нагружении // Стр. мех. и расчет соор. - 1977. - №5. - С. 26-29.
9. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции: Общий курс. М.: Стройиздат, 1991. 767с.

10. Боркаускас А.Э., Каркаускас Р.П. Вычислительные аспекты применения методов математического программирования к расчету пластин и оболочек по предельному состоянию // Лит. мех. сборник. Вильнюс: Минтис, 1971, №2/9/, с. 47-54.
11. Брехман А. И., Терегулова Э. Р., Низамеев В. Г. К расчету на прочность плиты, лежащей на упругом основании // Международная научно-практическая конференция "Автотранспортный комплекс. Проблемы и перспективы развития", Москва, 11 дек. - 2000. - С. 160-163.
12. Бурыгин С.Г., Вериженко В.Е., Дехтярь А.С. О несущей способности многослойных пластин // Изв. вузов. Стр-во и архит.-1988.-Кв.- С. - 26-31.
13. Бухгольц Н.Н. Основы курс теоретической механики. Часть I. – М.: Наука, 1972. – 468с.
14. Быковцев Г.И. О предельном равновесии анизотропных пластин и оболочек вращения. Изд. АН СССР, ОТН, мех. и машиностр., 1964. Кв.
15. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542с.
16. Викаро А., Толандр Р. Критерии прочности и анализ разрушения конструкций из композиционных материалов // Анализ и проектирование конструкций/Под ред. К.Чамиса., М.: Машиностроение, 1978, с.62-107.(Композиционные материалы, т.7,4.1).
17. Гвоздев А.А. Определение величины разрушающей критической нагрузки для статически неопределимых систем, претерпевающих пластические деформации // Тр. конф. по пластическим деформациям. М.: Изд-во АН СССР. – 1938. - С. 10-17.
18. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. – М.: Стройиздат, 1974. – 316с.
19. Герасимов В.П., Гладкий А.В. Несущая способность цилиндрической оболочки неоднородной структуры, вызванной конструктивными особенностями, при локальном нагружении // Мех. неоднородных структур:

- Тез. докл. 3 Всес. конф..Львов.17-19 сент. - 1991.,4.1.-Львов, 1991.-с.73.
- 20.Голованов А.И., Корнишин М.С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. – Казань: Таткнигоиздат, 1989. – 269с.
- 21.Гольденблат И.И..Копнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. -М.: Машиностроение,-1968.-192с.
- 22.Горбенко О.Д. К расчету несущей способности оболочки методом линейного программирования // Прикл. механика. Воронеж. - 1976. - С. 76-82.
- 23.Горбенко О.Д. Нелинейное программирование в расчете несущей способности оболочек вращения // Изв. АН СССР,МТТ. – 1978. - №1. - С. 180-183.
- 24.Давыдов М.Г., Мулюков В.В., Трусов П.В., Фрейтаг В.А. Математическое моделирование несущей способности цилиндрических сосудов на основе нелинейной теории пластичности // Математические методы и вычисл. техн. в хим. машиностроении. /Всес. Н.-и. и конструкт, ин-т, хим. маши-ностр.-М. 1990. - С. 81-89.
- 25.Дехтярь А. С. Оптимальная оболочка - подпорная стенка // Изв. вузов. Стр-во. - N 7. - 2002. - С. 16-21.
- 26.Дехтярь А.С., Сыдыков А.Ж. О несущей способности пологих жёстко–пластических оболочек с отверстиями // Прикладная механика (Киев). – 1994. – 30. - N6. – С. 73–79.
- 27.Друккер Д. О постулате устойчивости материала в механике сплошной среды // Механика. – 1964. – N3. – С. 115–128.
- 28.Дьяченко Е. Программа «Математика» 1997.
- 29.Евтушенко Б. В. Основы теории упругости и пластичности. Тонкие пластинки. Предельные состояния. Учебное пособие. – Тула.
- 30.Ерхов М.И. Конечное соотношение между силами и моментами при пластической деформации оболочек // Строительная механика и расчет сооружений. -1959. – №3. - С. 38-41.
- 31.Ерхов М.И. Монахов И.А., Себекина В.И. Методы расчета пластин и

- оболочек за пределом упругости при больших прогибах // Строительная механика и расчет сооружений. - 1981. - №6. - С. 17-21.
- 32.Ерхов М.И. Симметричная деформация цилиндрической оболочки за пределом упругости // Труды УНИИСК. Академия строительства и архитектуры СССР. - 1961. - Вып.4. - С .176-198.
- 33.Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352с.
- 34.Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Пер. с англ., М.: "Мир", 1975.
- 35.Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. – М.: Наука, 1966. – 232 с.
- 36.Ильюшин А.А. Пластичность.-М.-Л. -Гостехиздат,1948,-373с.
- 37.Карпенко Н.И. О современных построениях общих критериев прочности бетонных и железобетонных элементов // Бетон и железобетон. - 1997. - №3. - С. 4-7.
- 38.Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420с.
- 39.Каюмов Р.А. Об оценке несущей способности конструкций при произвольных условиях текучести // ПМТФ. – 1993. – N1. – С.115–120.
- 40.Клюшников В.Д. Математическая теория пластичности. – Изд-во Московского университета, 1979. – 207с.
- 41.Комаров К.Л., Немировский Ю.В. Динамика жестко-пластических элементов конструкций. Новосибирск:Наука, 1984.
- 42.Композитные материалы. Справочник/Под ред. Д.М.Карпинова. – Киев."Наукова думка",1985. -592с.
- 43.Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1976. – 352с.
- 44.Лепик Ю.Р. К несущей способности пластин и оболочек // Изв.АН СССР.Механика и машиностроение. - 1963,№4. - С. 107-171.
- 45.Малмейстер А.К. Геометрия теорий прочности // Механика полимеров. – 1966. – М. – С.159-534.

46. Микеладзе М.Ш. Несущая способность круглой анизотропной цилиндрической оболочки, нагруженной симметрично относительно своей оси // Изв. АН СССР. ОТП. - 1956. №9. - С. 105-108.
47. Микеладзе М.Ш. О несущей способности первоначально анизотропных оболочек // Докл. АН СССР. - 1954. - Т. 98, №6. - С. 921-923.
48. Микеладзе М.Ш. О пластическом течении анизотропных оболочек // Изв. АН СССР. ОТП. - 1955, М. - С. 67-80.
49. Мирзабекян Б.Ю., Рейтман М.И. Определение несущей способности оболочек при помощи линейного программирования // Инж. ж. МТТ. - 1968, №1. - С. 122-124.
50. Мурзенко А.Ю. (Новочеркасская государственная мелиоративная академия). Эволюция принципов расчета железобетонных статически неопределимых конструкций кинематическим методом предельного равновесия / А. Ю. Мурзенко // Известия ВУЗов Северо-Кавказского региона. Технические науки. Приложение. - 2006. - N 3. - С. 86-90. - (Строительство). - Библиогр.: с. 89-90 (25 назв.)
51. Наглявичус Ю.А., Чирес А.А. Определение предельной нагрузки для пологих цилиндрических оболочек с применением математического программирования // Литовский механический сборник. Вильнюс: Минтис. - 1968. - №2. - С. 68-78.
52. Немировский Ю. В. Предельное упругое сопротивление армированных плит при динамических нагрузках // Конструкции из композиц. матер. N 1. - 2004. - С. 6-12.
53. Немировский Ю.В. Алгоритм численного решения многоточечных краевых задач теории предельного равновесия / Ю. В. Немировский, А. В. Налимов // Вестник Самарского государственного университета. - 2004. - N 4. - С. 47-59. - (Вычислительная математика).
54. Немировский Ю.В. Нижние оценки предельных нагрузок идеально-пластических однородных и неоднородных конструкций // Докл. РАН. - 2001, т.379. - С. 59-62.

- 55.Немировский Ю.В. Об условии прочности для армированного слоя. /ЛШТФ.-1969.- N5. - С.81-88.
- 56.Немировский Ю.В. Предельное равновесие многослойных армированных осесимметричных оболочек // Изв.АН СССР Механика твердого тела.-1969.-№6.- С. 80-89.
- 57.Немировский Ю.В., Налимов А.В., Налимова Г.М. Несущая способность армированных цилиндрических оболочек. Препринт №28-87 ИТПМ СО АН СССР,Новосибирск,1987.
- 58.Немировский Ю.В., Шульгин А.В. Упругопластическое деформирование и разрушение оболочек из волокнистых металлокомполитов // Механика комполитных материалов. – 1990. – N6. – С. 1064–1071.
- 59.Немировский Ю.В., Янковский А.П. Влияние структуры армирования и формы профиля на предельное равновесие поперечно изгибаемых кольцевых пластин // Вестн. Нижегород. ун-та. Сер. Мех. N 1, 2006. - С. 123-133.
- 60.Немировский Ю.В., Янковский А.П. Влияние структуры армирования на предельную скорость вращения комполитных дисков // Проблемы машиностроения и надежности машин - 2006. - С. 44-51, N 1. - Библиогр.: с. 51 (10 назв.).
- 61.Немировский Ю.В., Янковский А.П. Предельное равновесие железобетонных куполов вращения // Изв. вузов. Стр-во N 8. - 2005. - С. 4-11.
- 62.Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л..Судпромизд.,- 1962.
- 63.Овечкин А.М. Расчет железобетонных осесимметричных конструкций. – М.: Госстройиздат, 1961. – 241с.
- 64.Олышак В., Савчук А. Неупругое поведение оболочек.-М..Мир, 1969,- 144с.
- 65.Палмер Э. Применение динамического программирования к задаче о предельном равновесии цилиндрических оболочек. - Механика. Период. сб. перев. ин. статей, 1970, №6, с. 121-134.
- 66.Панасенко Н.Н., Дудченко А.Н. Математическая модель абсолютно

- жёсткого пространственного конечного элемента // Изв. вузов. Сев. – Кавк. регион. Техн. н. – 1994. – N3–4. – С.214–227.
- 67.Победря Б.Е. Механика композиционных материалов.-М.:Изд. Моск.университета,1984.-336с.
- 68.Полищук В.П., Поветкин С.В. Расчёт прочности железобетонных конструкций при сложных сопротивлениях. – Курск: Изд-во гос. техн. ун-та, 1996. – 144с.
- 69.Постнов В.А., Трубочёв М.И. Новая модель изопараметрического конечного элемента для расчёта оболочек // Изв. АН. МТТ. – 1995. – N1. – С.141–146.
- 70.Проценко А.М. Предельное равновесие пологих оболочек // Тр.VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. - 1969.М.:Наука. - 1970. - С.513-517.
- 71.Проценко А.М. К 60-летию создания А.М. Гвоздевым теории предельного равновесия // Бетон и железобетон. - 1997. -№3. -С. 2-4.
- 72.Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 2. Под ред. д-ра техн. наук проф. И.А.Биргера и чл.-кор. АН Латвийской ССР Я.Г.Пановко.
- 73.Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 744 с.
- 74.Работнов Ю.Н. Приближенная техническая теория упруго-пластических оболочек // ПММ. - 1951,т.15,Кб. - С. 167-174.
- 75.Ржаницын А.Р. Определение несущей способности цилиндрических сводов-оболочек с применением параметрического линейного программирования // Большепролетные оболочки, т. 1,М.: Стройиздат. - 1969. - С. 465-484
- 76.Ржаницын А.Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек.- М.: Наука,1983.
- 77.Ржаницын А.Р. Приближённые решения задач теории пластичности //

- Исследования по вопр. строит. механ. и теории пластичности. М.: Госстройиздат, 1956. – С. 6–65.
- 78.Ржаницын А.Р. Расчет оболочек методом предельного равновесия при помощи линейного программирования // Тр.VI Всес. конференции по теории оболочек и пластинок - 1966. М.: Наука, 1966. - С. 656-665.
- 79.Ржаницын А.Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М.:Гос. изд.лит. по строительству и архитектуре, 1954.- 343 с.
- 80.Ржаницын А.Р. Сопротивление материалов.- М.: Наука,1983.
- 81.Ржаницын А.Р., Пологие оболочки и волнистые настилы, Научные сообщения Академии строительства и архитектуры СССР, М., т. 4, 1960.
- 82.Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. – СПб: Изд-во гос. ун-та, 1996. – 278с.
- 83.Розенблюм В.И. О расчете несущей способности идеально пластических осесимметричных оболочек. // Исследования по упругости и пластичности, М. Л.:ЛГУ. – 1965. - С. 207-218.
- 84.Розенблюм В.И. Об условии пластичности для. тонкостенных оболочек // ПММ. - 1960. - Т.24. - С. 364-366.
- 85.Розенблюм В.И. Приближенная теория равновесия пластических оболочек // ПММ. - 1954. - Т.18, №3, - С. 289-302.
- 86.Савчук А. О теории анизотропных пластических оболочек и пластинок // Механика. Период.сборник перев.ин.статей. – 1961.- КЗ. - С. 153-161.
- 87.Себекина В.И. Кинематический метод определения предельного состояния оболочек с применением линейного программирования // Тр. VII Всес. конференции по теории оболочек и пластинок, 1969. М.: Наука. - 1970. - С. 547-550.
- 88.Себекина В.И. О предельном равновесии анизотропных оболочек при осесимметричных нагрузках // Строительная механика и расчет сооружений. - 1966. - №4.
- 89.Седых Ю.Р. Критериальные оценки состояния бетонных и железобетон-

- ных конструкций ГЭС и ГАЭС / Седых Ю. Р., Семененок С. Н. // Гидротехн. стр-во . N 6 .— Б.м., 2003 .— 17-22 : 3 табл. — J03392934 .— Технология силикатных и тугоплавких неметаллических материалов .— 2004 .— N 12.
- 90.Сибгатуллин Э.С. К расчету анизотропных тонких оболочек по теории предельных состояний / Деп. в ВИНТИ 02.11.81, N4997. – 12с.
- 91.Сибгатуллин Э.С. Несущая способность и оптимальное проектирование жестко-пластических оболочек вращения. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Казань. - 1985. - 236 с.
- 92.Сибгатуллин Э.С. Построение предельной поверхности для тонких многослойных композитных пластин и оболочек // Труды 14-ой Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Т.2. – Тбилиси: 1987. – С.418–423.
- 93.Сибгатуллин Э.С., Терегулов И.Г., Тимергалиев С.Н. Предельное состояние слоистых композитных оболочек при совместном действии статических и циклических нагрузок // Изв. АН РФ. МТТ. – 1994. – N4. – С.155–161.
- 94.Супрун А.Н. К проблеме существования конических точек и вогнутостей на поверхности текучести металлов // МТТ. – 1991. – N4. – С. 180–185.
- 95.Терегулов И.Г. К методам расчета тонких оболочек по предельным состояниям // Избр.продл.прикл.мех., М., 1974, - С. 673-679.
- 96.Терегулов И.Г. О методах сведения континуальных нелинейных задач механики твердого деформируемого тела к задачам дискретным // Изв. АН СССР.МТТ. - 1972,К6. - С.21-27.
- 97.Терегулов И.Г. О предельном состоянии круглой пластинки и сферического пологого сегмента // Исследования по теории пластин и оболочек. Вып.4. Казань:КГУ. - 1966. - С. 431-440.
- 98.Терегулов И.Г. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1984. – 472с.

- 99.Терегулов И.Г., Сибгатуллин Э.С. Критерий разрушения для многослойных композитных пластин и оболочек // Механика композитных материалов. – 1990. – N1. – С. 74–79.
- 100.Терегулов И.Г., Сибгатуллин Э.С. Метод расчёта на усталость композитных оболочек и пластин // Механика композитных материалов. – 1990. – N5. – С. 871–876.
- 101.Терегулов И.Г., Сибгатуллин Э.С. Определение несущей способности торообразной оболочки вращения на основе кинематического метода // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1979. – N4. – С. 85–88.
- 102.Терегулов И.Г., Сибгатуллин Э.С., Маркин О.А. Предельное состояние многослойных композитных оболочек // Механика композитных материалов. – 1988. – N4. – С. 715–720.
- 103.Терегулов И.Г., Сибгатуллин Э.С., Низамеев В.Г. Определение несущей способности многослойных композитных цилиндрических оболочек, подкреплённых шпангоутами, статическим методом // Моделирование в механике. Новосибирск. - 1990. - №6.- С. 146-150.
- 104.Терегулов И.Г., Сибгатуллин Э.С., Низамеев В.Г. Предельные поверхности для многослойных композитных оболочек // Исслед. по теории пластин и оболочек. – 1991. – вып.23. – С. 75–80.
- 105.Тетере Г.А. Рикардс Р.Б. Нарусберг В.Л. Оптимизация оболочек из слоистых композитов. Рига,"Зынатие",1978,240с.
- 106.Фейенберг С.М. Принцип предельной напряжённости // ГОШ.-1948. - Т.12. - С. 63-68.
- 107.Хилл Р. Математическая теория пластичности. - М.:Изд-во иностр. лит-ры, 1956. - 321с.
- 108.Химмелблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 536с.
- 109.Цхвеладзе Р.М.,Мачаидзе Э.П.,Кипиани Г.О. Расчет тонкостенных конструкций типа оболочек при помощи модели жестко-пластического

- тела // Известия вузов. Машиностроение. - 2005. - С. 6-11, N 3. Библиогр.: с. 11 (7 назв.)
110. Шапиро Г.С. О поверхностях текучести для идеально пластических оболочек // Проблемы механики сплошной среды. – М., 1961. – С. 504–507.
111. Шестаков А.С., Тимошенко А.М. О несущей способности пластин из композиционных материалов // Прикладная механика. – 1989. – 25, N4. – С. 126–128.
112. Шугаев В.В. Проектирование и исследование сталежелезобетонных оболочек покрытий с большими световыми проемами / Шугаев В. В., Соколов Б. С., Аксенов К. И. // 2 Всероссийская (Международная) конференция "Бетон и железобетон - пути развития ", Москва, 5-9 сент., 2005 . Т. 2. Секционные доклады. Секция "Железобетонные конструкции зданий и сооружений " .— Б.м., 2005 .— 247-257 : 17 ил. — В05427595 .— Экономика строительства .— 2006 .— N 01.
113. Шугаев В.В. Расчет несущей способности гладких и ребристых железобетонных оболочек методом предельного равновесия в нелинейной постановке / Шугаев В. В., Соколов Б. С. // Строит. мех. и расчет сооруж. . N 1 .— Б.м., 2005 .— 8-13 .— J0548349X .— Механика деформируемого твердого тела .— 2006 .— N 03.
114. Щербаков В.Т., Попов А.Г. Экспериментальное исследование прочности и устойчивости оболочек из углепластика // Механика композитных материалов. – 1990. – N2. – С. 256–262.
115. Эремадзе Н.В. Расчет деформаций консольных железобетонных оболочек при ударных нагрузках на основе принципа постоянства количества движения / Эремадзе Н. В., Эремадзе Н. В. // Теория сооруж. и сейсмостойкость . N 4 .— Б.м., 2004 .— 144-149 .— J05072392 .— Механика деформируемого твердого тела .— 2006 .— N 04.
116. Эремадзе Н.В. Расчет остаточных деформаций железобетонных оболочек типа гиперболического параболоида под импульсной нагрузкой /

- Эремадзе Нелли. В., Эремадзе Нана. В. // Теория сооруж. и сейсмостойкость . N 4 .— Б.м., 2004 .— 150-156 .— J05072392 .— Механика деформируемого твердого тела .— 2006 .— N 04.
117. Belytschko Ted, Hodge Philip G., Jr. Plane stress limit analysis by finite elements // S. End. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. - 1970, v. 96, M6, - P. 931-944.
118. Biron Andre, Chawha U.S. Numerical method for limit analysis of rotationally symmetric shells // Bull. Acad. pol. sci. ser. sci. techn. - 1970, v. 18. - №2. - P. 185-193.
119. Biron Andre, Hodge Philip G., Jr. Non-linear programming method for limit analysis of rotationally symmetric shells // Internat. J. Non-Linear Mech. - 1968. v. 3 - P. 201 -213.
120. Bonet J.L. Capacity of RC rectangular sections subjected to biaxial bending: simplification to an increased uniaxial bending moment = Несущая способность прямоугольных железобетонных профилей при двухосном изгибе: сведение к повышенному изгибающему моменту в одной плоскости / Bonet J. L., Fernandez M. A., Romero M. L., Miguel P. F. // Mag. Concr. Res. . N 8 .— Б.м., 2005 .— 1379-483 .— J05491727 .— Технология силикатных и тугоплавких неметаллических материалов .— 2006 .— N 16.
121. Cannorozzi Agostino A. A nontraditional linearizing procedure in limit analysis // S. Struct. Mech.. - 1980, Y. 8. - №4. - P. 449-470.
122. Cho J. R., Jeong H. S. Application of upper bound method to the powder-forging of cup-shaped axisymmetric preforms for estimating punch load = Применение метода верхней границы для определения сил давления прессования из порошка осесимметричных заготовок в форме чаш // Int. J. Numer. Meth. Eng. N 4. - 2001, т. 51. - С. 429-448.
123. De Borst R., Feenstra P.H. Studies in anisotropic plasticity with reference to the Hill criterion // Int. J. Numer. Meth. Eng. — 1990. — 29, N2. — P. 315–336.
124. Drucker D.C. , Greenberg H. I. , Prager W. Extended limit design theorems for continues media // Quart. Appl. Math. - 1951. - №9. - P. 381-389.

125. Francescato Pascal, Pastor Joseph, Thai The-Hung. Etude du critere de plasticite des materiaux poreux = Пластическое разрушение пористых материалов // C. r. Acad. sci. Ser. 2. Fasc. b N 10. - 2001, т.329. - С. 753-760
126. Gupta A., Signh R.K., Kushwaha H.S., Mahajan S.C., Kakodkaz A. Ultimate load capacity assessment of reinforced concrete shell structures = Оценка несущей способности железобетонных оболочечных конструкций // BARS [Rept]. – 1993. № E036. – С. 1-30.
127. Hill R. A note on estimating the yield point loads in a plastic-rigid body // Phil.Mag.. - 1952.v.43. - P. 353-355.
128. Hodge P. G., Jr., Limit analysis of rotationally symmetric plates and shells, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963.
129. Hodge P.G. Jr. Yield conditions for rotationally symmetric shells under axisymmetric loading // Paper.Amer.Soc.Mech. Engrs. -1959. - N A-129. - P. 9.
130. Hodge P.G., Jr. Automatic piecewise linearization in ideal plasticity // Comput.Meht. Appl. Mech. and Eng. - 1977,- v. 10. - №3. - P. 249-372.
131. Janas M., Carrying capacity of a cylindrical shell roof (in Polish) // Arch. Inz. Lad. - 1962. -N 8. - P. 365—374.
132. Janas M., Limit analysis of non-symmetric plastic shells by a generalized yield line method // Non-classical shell problems, North-Holland Publishing Company, Amsterdam. - 1964. - P. 997—1010.
133. Johnson D. Yield – line analysis by sequential linear programming // Int. J. Solids and Struct. – 1995. – 32, N10. – P.1395–1404.
134. Kaliszky S., Limit design of truncated cone-shaped reinforced concrete shells // Non-classical shell problems, North-Holland Publishing Company, Amsterdam. - 1964. - P. 1011— 1029.
135. Misteth E. New method for the determination of the limit bearing force by using the propability calculus // Acta tech Acad. scient. hung.. - 1966, v. 53. - N 3-4. - P. 297-324.
136. Olszak W., Sawczuk A, Die Crenztrgf higkeit von zilindrischen schalen bei verschiedenen Formen der Plastiziz tsbedingung // Actatechn. Acad.

- scient.hung.. - 1959,v.26. - №1-2. - P. 35-77.
137. Onat E.T., Prager W. Limit analysis of shells of revolution // Proc.Ned. Acad. Wet-tensch. - 1954,ser. B. 57.
 138. Pastor J., Thai T. H., Francescato P. New bounds for the height limit of a vertical slope = Новые связи для предельной высоты вертикального откоса // Int. J. Numer. and Anal. Meth. Geomech. 2. - 2000. - т.24. - С. 165-182.
 139. Polizzotto C., Borino G., Fuschi P. An approach to elastic shakedown based on the maximum plastic dissipation theorem = К решению задачи упругого разрушения на основе теоремы о максимуме пластической диссипации // Arch. Mech. N 4-5. - 2000. - т.52. - С. 713-735.
 140. Sawczuk A., Olszak W., A method of limit analysis of reinforced concrete tanks // Simpl. shell calc. methods, North-Holland Publishing Company, Amsterdam. - 1962. - P. 416-437.
 141. Sawczuk A., On experimental foundations of the limit analysis theory of reinforced concrete shells // Shell research, North-Holland Publishing Company, Amsterdam. - 1961. - P. 217—231.
 142. Sawczuk A., Kenig J. A., Limit analysis of reinforced concrete cylindrical silos (in Polish) // Arch. Inz. Lad. - 1962. -N8. - P. 161—183.
 143. Shaishmelashvili, N. Bearing capacity and optimum design of discrete systems working mainly in one direction = Несущая способность и оптимальное проектирование дискретной системы, работающей преимущественно в одном направлении / Shaishmelashvili N. // Пробл. прикл. мех. Международный научный журнал. N 2 .— Б.м., 2003 .— 79-80, 125, 129 .— J03499526 .— Общие вопросы механики. Общая механика .— 2004 .— N 02.
 144. Teng, T.-L. Penetration resistance of reinforced concrete containment structures = [Стойкость защитных оболочек АЭС из железобетона при воздействии на них падающих объектов] / Teng T.-L., Chu Y.-A., Chang F.-A., Shen B.-Ch. // Ann. Nucl. Energy . N 3 .— Б.м., 2005 .— 281-298 .—

J05353774 .— Ядерные реакторы .— 2006 .— N 08.

145. Yeom D.J., Robinson M. Limit analysis of a spherical shell under axial loading on central boss = Предельное равновесие сферической оболочки под действием осевой силы, приложенной к центральной жесткой шайбе // Trans ASME J. Pressure Vessel Technol – 1996. – 118, N4. – с. 454-459.

Приложение

Расчет по несущей способности монолитной фундаментной плиты храма в г. Елабуга, республика Татарстан

Рассмотрим железобетонную фундаментную плиту, рис. П.1. Габаритные размеры в плане 34.4x14.04 м, толщина 500 мм.

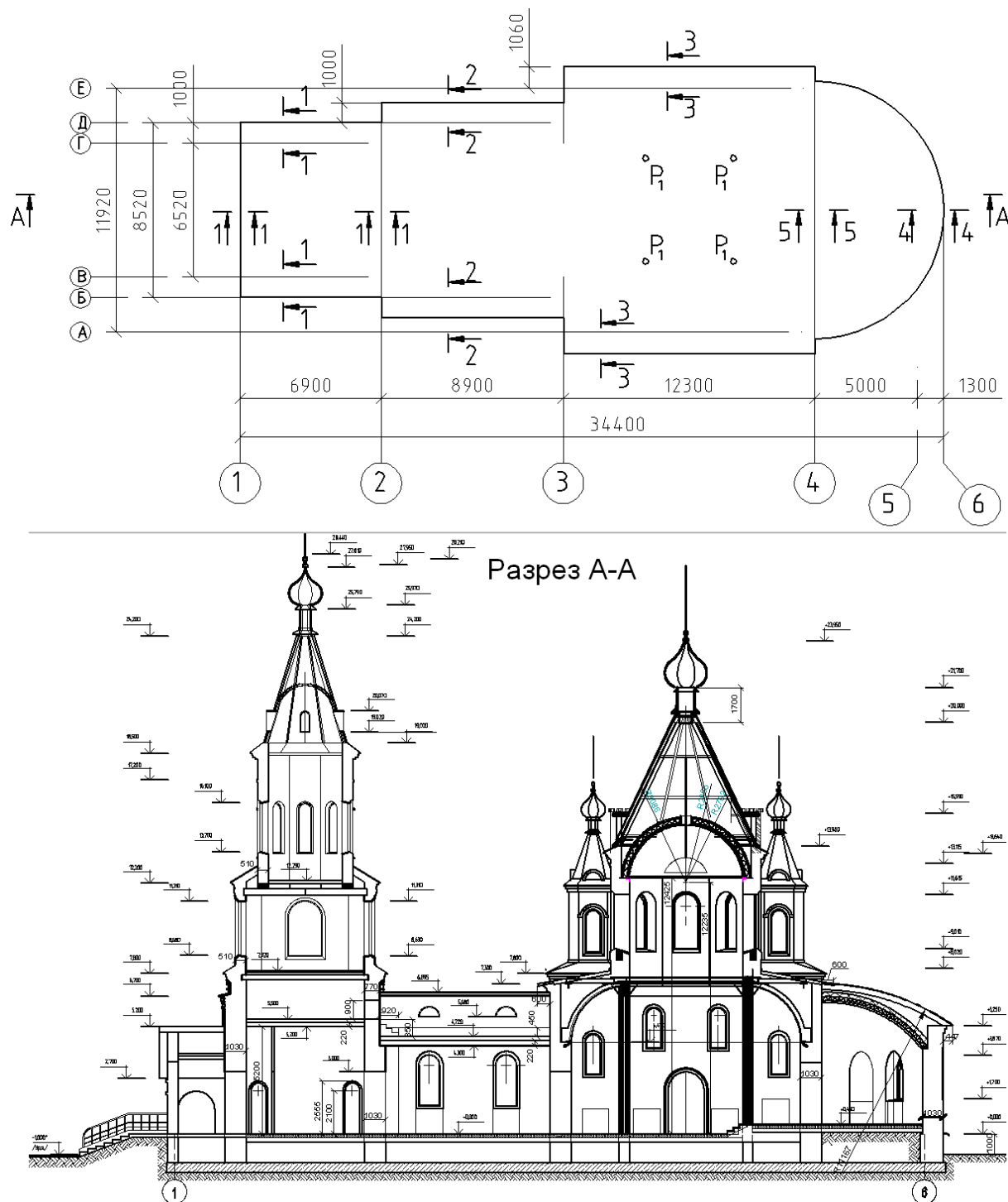


Рис. П.1

Проектировщиками фирмы «Реал» предварительно принято равномерное армирование материала фундамента: сетка из арматуры класса А-III диаметром 12 мм с шагом 200 мм, в сжатой и растянутой зонах. Условно будем считать, что плита состоит из семи совместно работающих слоев. Толщины этих слоев: $h_1 = 50$ мм; $h_2 = h_3 = h_5 = h_6 = 12$ мм; $h_4 = 332$ мм, $h_7 = 70$ мм. Углы ориентации слоев: $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_7 = 0^\circ$, $\varphi_3 = \varphi_6 = 90^\circ$ (рис П.2). Расчетные нагрузки приведены в таблице П.1. Расчетное сопротивление грунта на всех участках равно 0.264 МПа.

Таблица П.1

Сечение	Нагрузка
1-1	40.2 т/м
2-2	39.7 т/м
3-3	32.5 т/м
4-4	24.2 т/м
5-5	34.8 т/м
P_1	123.3 т

Необходимо определить достаточность принятой арматуры. При недостаточности – усилить армирование и проверить достаточность усиленной арматуры.

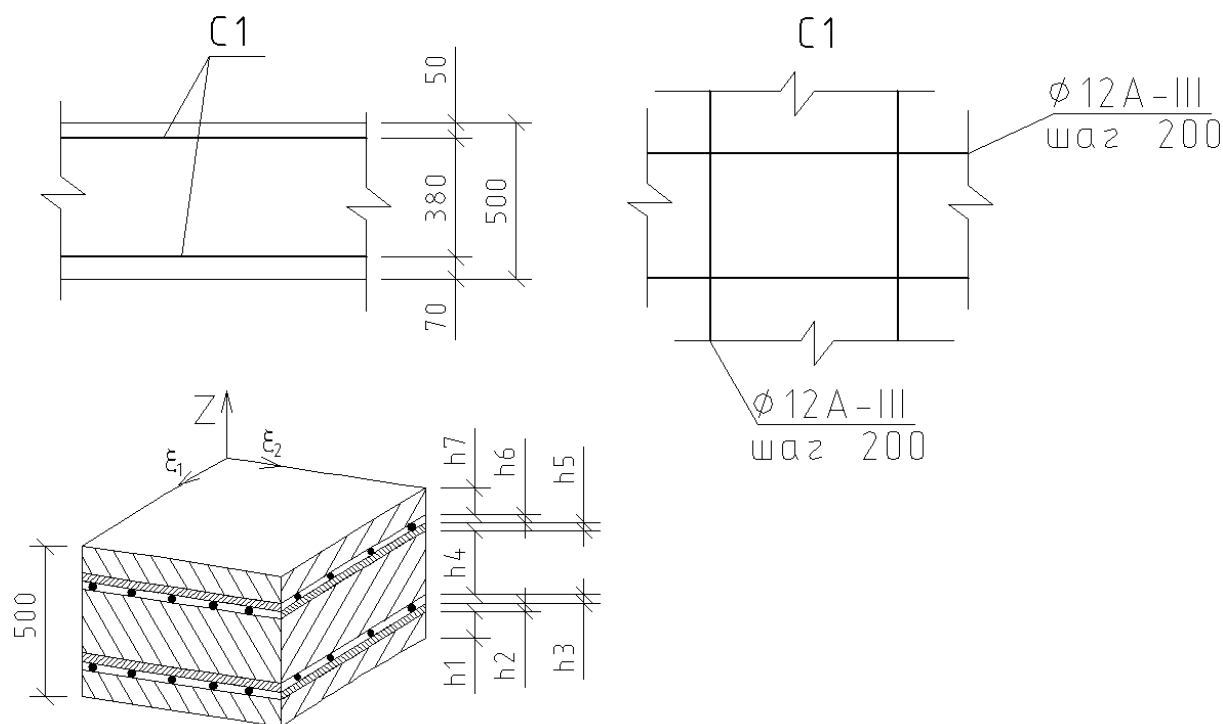


Рис. П.2

Для построения критериев прочности используем табличные данные для бетона марки В15 и арматуры класса А-III: $R_{bn}=11$ МПа, $R_{bтн}=1.15$ МПа, $R_{sn}=390$ МПа. Таким образом, в пространстве напряжений поверхности прочности описываются следующими уравнениями:

для слоев 1, 4, 7:

$$0.079\sigma_{xx}^2 - 0.0524\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 0.079\sigma_{yy}^2 + 0.3893\sigma_{xx} + 0.3893\sigma_{yy} + 0.4756(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 1 \quad (\text{МПа}^2);$$

для слоев 2, 3, 5, 6:

$$0.00066\sigma_{xx}^2 - 0.0002\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 0.079\sigma_{yy}^2 + 0.00296\sigma_{xx} + 0.3893\sigma_{yy} + 0.3976(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 1 \quad (\text{МПа}^2).$$

Здесь силы – в МН/м, моменты – в МН·м/м, коэффициенты получены по формулам $a = -1/(\sigma_{xx}^{ut}\sigma_{xx}^{uc}), \dots, n = 1/(\sigma_{yz}^u)^2$ (индекс u относится к предельным, t – к растягивающим, c – к сжимающим напряжениям; оси системы $(xyz)_j$ совпадают с осями ортотропии j -го слоя, $z_j \perp S_0$, рис. П.2). Согласно предлагаемой методике, построим уточненные сечения соответствующей гиперповерхности прочности (рис. П.3, а – сечение гиперповерхности прочности для материала купола плоскостью $T_{11}OT_{22}$, б – сечение гиперповерхности плоскостью $M_{11}OM_{22}$, в – сечение гиперповерхности плоскостью $Q_{31}OQ_{32}$, г – сечение гиперповерхности плоскостью $T_{12}OM_{12}$).

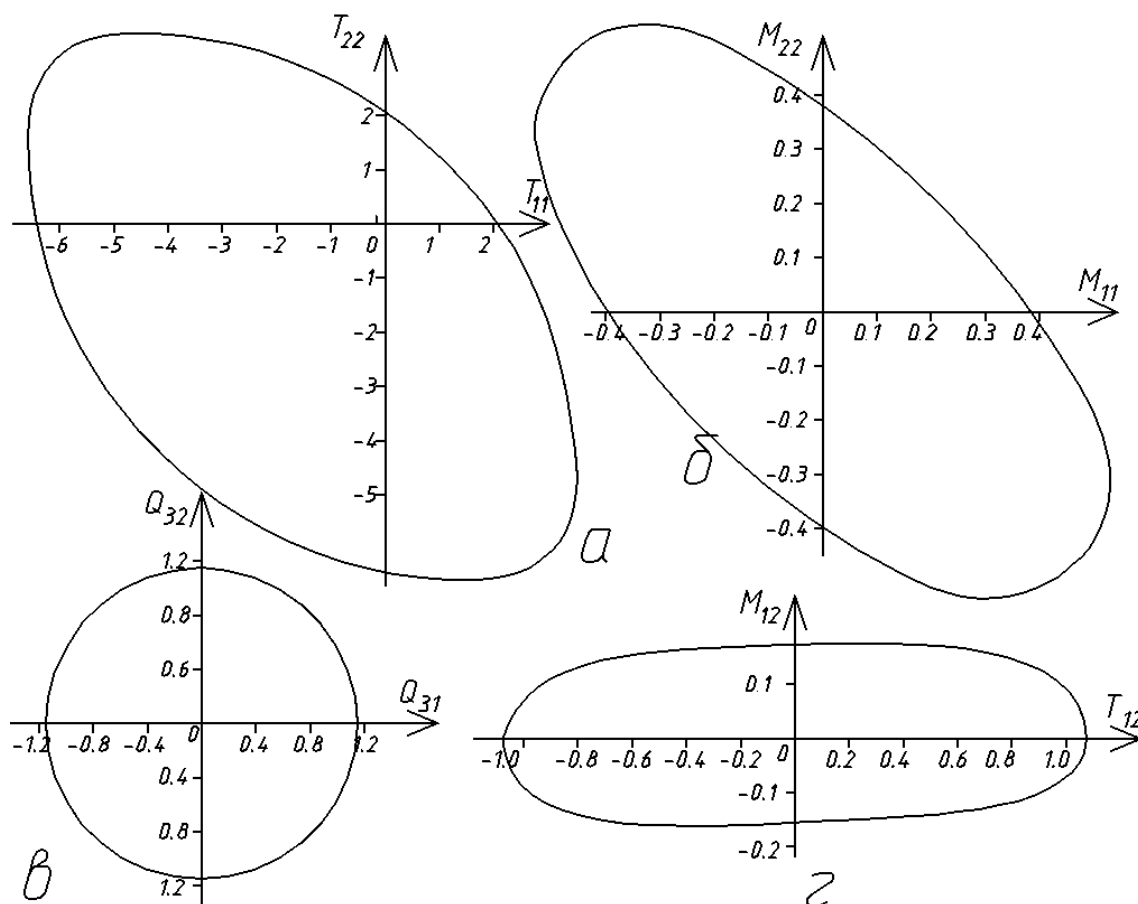


Рис. П.3

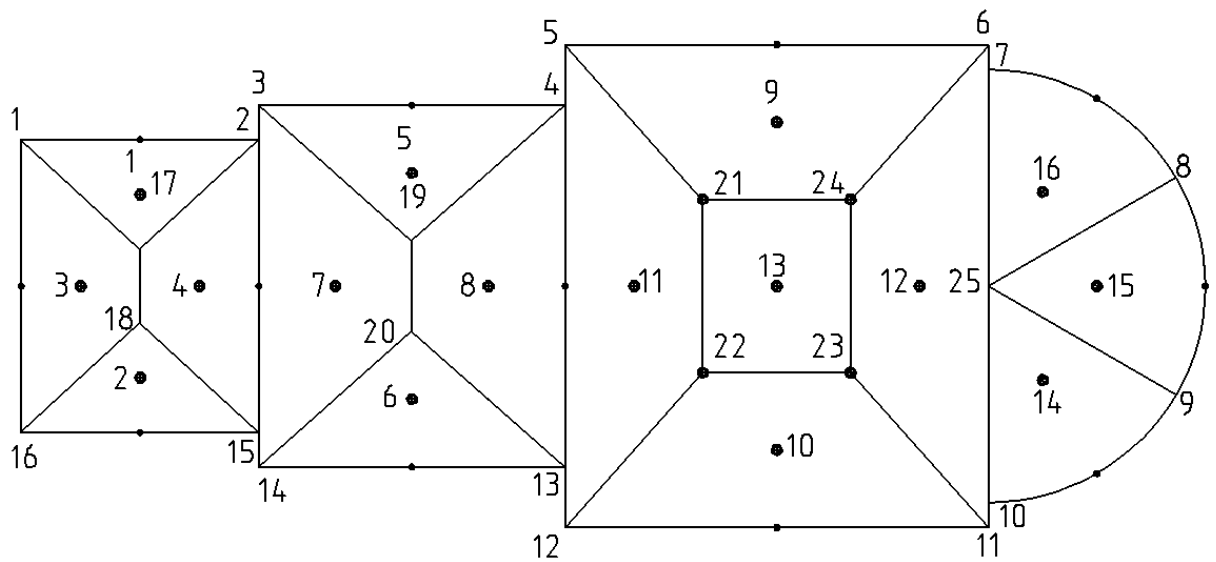


Рис. П.4

Примем схему разбиения на жесткие элементы как на рис П.4. Внешние нагрузки определим для каждого жесткого элемента. Примем условно за единичную нагрузку силу, приложенную на оси 4 ($P = 34.8 \cdot 14.04 = 488.592$ т), нагрузку на остальные жесткие элементы примем пропорционально максимальной (на сечении 5-5, рис. П.1)

Используем соотношения, приведенные в разделе 3.2, а также учитываем диссипацию грунта основания. Тогда задача линейного программирования записывается в виде: найти $\min \mu^+$, где

$$\mu^+ = 0.5 \sum_{k=1}^m (N_{1k} + N_{2k}) l_k - \sum_{j=1}^{n_2} (\vec{F}_j^1 \vec{v}_j + \vec{M}_j^1 \vec{\omega}_j) + \sum_{j=1}^{n_3} \sum_{i=1}^{n_4} \frac{S_j}{n_4} d_i,$$

добавляются ограничения вида

$$d_i \geq -R_i v_{AZ} - R_i \Delta_i^x \omega_{AX} + R_i \Delta_i^y \omega_{AY}.$$

Здесь n_3 – количество жестких элементов, n_4 – количество характерных точек диссипации для каждого элемента, S_j – площадь j -го элемента, R_i – сопротивление грунта для i -ой точки каждого жесткого элемента, d_i – скорость диссипации внутренней энергии при деформировании грунта (с единицы площади контакта основания и плиты) в i -ой точке контакта.

В результате решения задачи ЛП, получили следующую таблицу П.2 результатов:

Таблица П.2

min $\mu^+ = 4.30769457099088$							
№ диска	$v_x, \text{M/c}$	$v_y, \text{M/c}$	$v_z, \text{M/c}$	ω_x, c^{-1}	ω_y, c^{-1}	ω_z, c^{-1}	
1	-0.0199	-0.00752	-0.42687	0.0865	-0.11328	-0.00648	
2	-0.0007	0.003336	-0.21192	0.11783	-0.03619	0.00174	
3	-0.0013	0.000605	-0.38465	0.22671	0.05829	0.00375	
4	-0.0077	-0.00284	0.03936	-0.00891	-0.01061	-2.2E-06	
5	-0.0023	-0.0016	-0.01508	-0.00431	-0.00368	-0.00058	
6	0.00036	-0.00016	5.27E-05	0.00086	0.00201	8.1E-05	
7	-0.0037	-0.00363	-0.03429	0.00865	-0.00344	-0.00032	
8	0.00017	-0.00026	0.001953	-0.00078	-3.1E-07	-2.1E-06	
9	-0.0003	-0.00044	0	0	0	1E-05	
10	0.00018	-0.00011	4.2E-08	0	0	1.5E-05	
11	-0.0002	-0.00032	3.08E-08	0	0	3.9E-05	
12	-0.0005	-0.00031	0	0	0	3.3E-05	
13	-0.0002	-0.00034	1.82E-08	1.8E-08	0	-3.9E-05	
14	-0.0003	0.000105	0	0	0	3E-05	
15	-0.0005	-0.00029	0	0	0	2.7E-05	
16	-0.0011	-0.00049	0	0	0	1.5E-05	
№ диска	d_i (скорости диссипации для грунта)						
	1	2	3	4	5	6	7
1	17: 0	1: 0.16048	2: 0				
2	15: 0.003923	16: 0.18411	18: 0.0055				
3	17: 0	1: 0.1674	16: 0.0277	18: 0			
4	2: 0	17: 0	18: 0	15: 0			
5	3: 0.015	4: 0	19: 0				
6	13: 0	14: 0.00202	20: 0				
7	2: 0	15: 0.00042	14: 0	3: 0.0303	19: 0	20: 0	
8	4: 0	19: 0	20: 0	13: 0			
9	5: 0	6: 0	21: 0	24: 0			
10	11: 0	12: 0	22: 0	23: 0			
11	4: 0	13: 0	12: 0	5: 0	21: 0	22: 0	
12	6: 1.32E-09	24: 0	23: 0	11: 6E-12	7: 0	25: 0	10: 0
13	24: 0	21: 0	22: 0	23: 2E-10			
14	25: 0	10: 0	9: 0				
15	25: 0	9: 0	8: 0				
16	7: 0	25: 0	8: 0				
Скорости диссипации для плиты							
№ линии, i		$N_{i1}, \text{MH/c}$		$N_{i2}, \text{MH/c}$			
1: 17-1		0.042813685		0.017185089			
2: 1-2		0		0			

3: 2-17	0.027953891	0.028759895
4: 16-1	0	0
5: 15-16	0	0
6: 17-18	0.099920758	0.076715548
7: 18-15	0.072024824	0.047540908
8: 16-18	0.024837319	0.026596149
9: 2-15	0.003410087	0.003410087
10: 3-4	0	0
11: 14-3	0	0
12: 13-14	0	0.016074936
13: 19-3	0.066165321	0.003682376
14: 4-19	0.003346402	0.005660093
15: 19-20	0.021802409	0.007682551
16: 20-13	0.000750905	0.00068541
17: 14-20	0.014524805	0.007356672
18: 4-13	0.000282307	0.000282181
19: 5-6	0	0
20: 12-5	0	0
21: 11-12	0	0
22: 21-5	0	0
23: 12-22	0	0
24: 6-24	1.03145E-08	0
25: 23-11	0	0
26: 24-21	1.12073E-08	0
27: 21-22	0	0
28: 22-23	0	0
29: 23-24	0	1.03345E-08
30: 6-11	0	0
31: 7-25	0	0
32: 25-10	0	0
33: 25-9	0	0
34: 25-8	0	0
35: 7-8	0	0
36: 8-9	0	0
37: 9-10	0	0

Соответствующие эпюра скоростей диссипации внутренней энергии на линиях разрушения (а), схема разрушения (б) и эпюра диссипации внутренней энергии грунта (в) приведены на рис. П.5.

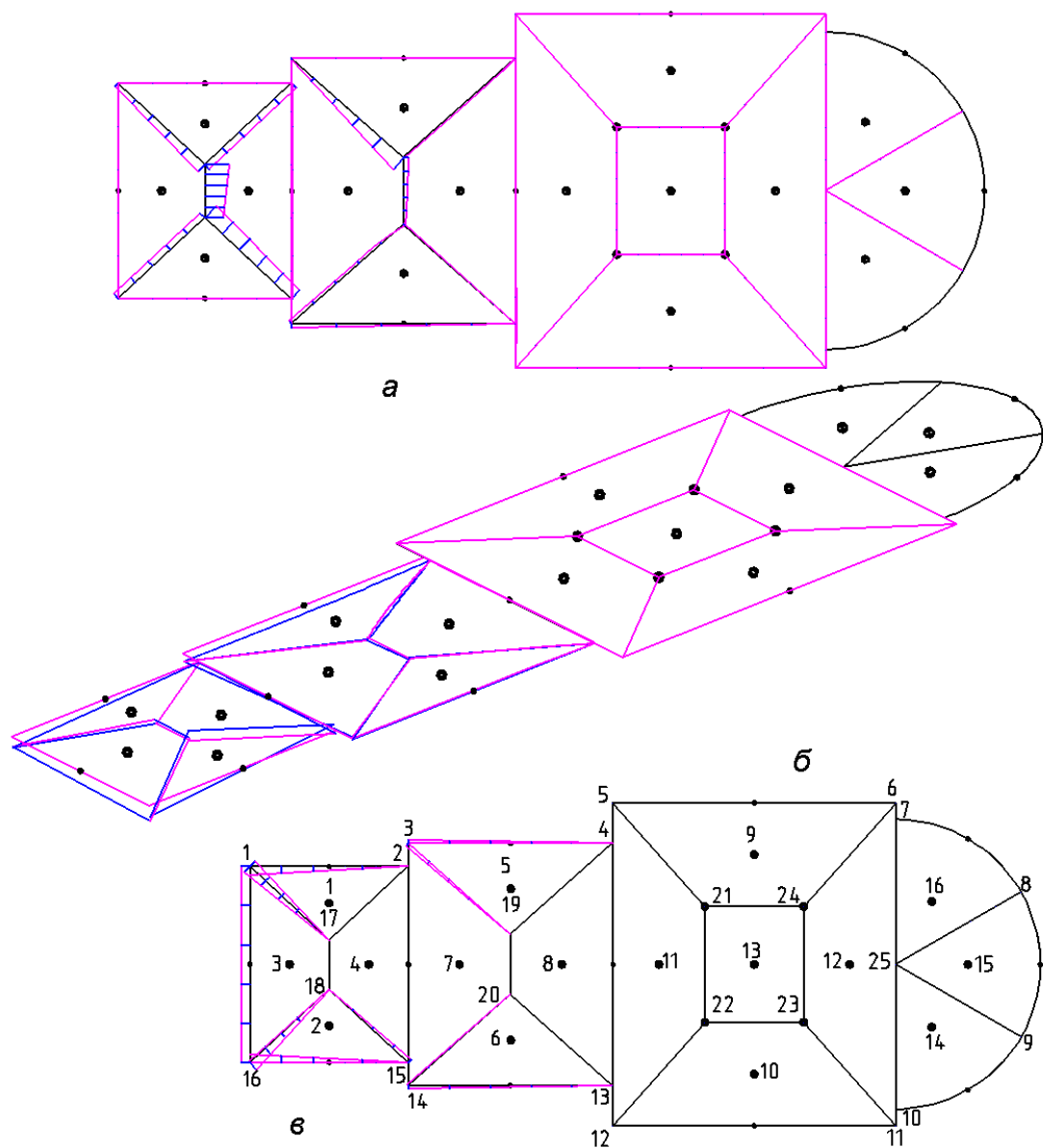


Рис. П.5

Таким образом, разрушающая нагрузка для сечения 5-5 составила $4.30769 \text{ МН} / 9,81 \text{ м/с}^2 / 14.04 \text{ м} = 31.2758 \text{ т/м}$, что меньше чем эксплуатационная 34.8 т/м .

Как видно из рисунка П.5, наибольшая интенсивность разрушения достигается в центральных зонах между осями 1-2, Б-Д. Примем диаметр арматуры 14 мм в этой зоне. Получим следующие сечения гиперповерхности прочности (рис. П.6, штриховые линии, сплошные линии – для диаметра 12 мм).

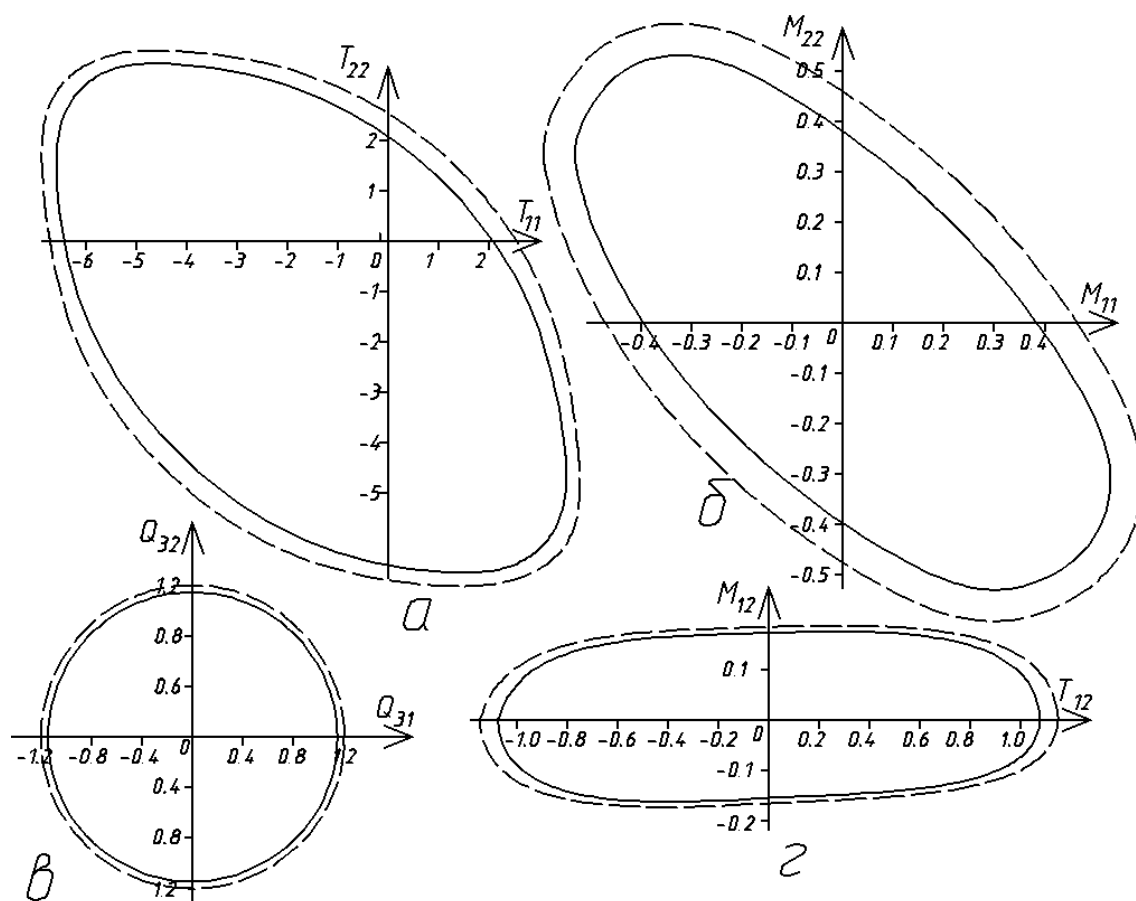


Рис. П.6

Для этого случая также решим задачу ЛП, получим таблицу результатов П.3.

Таблица П.3

min $\mu^+ = 4.38134717912628$						
№ диска	v_x , м/с	v_y , м/с	v_z , м/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹
1	-0.0117	-0.0068	0.05002	-0.0318	-0.0417	-0.0029
2	-0.0047	-0.0003	0.00946	0.03444	0.195	-0.0005
3	-0.0077	-0.0085	0.00719	0.01485	0.0197	0.0014
4	0.00166	-0.0004	0.03427	-0.035	0.00547	0.0007
5	-0.0058	-0.0041	0.02901	-0.0191	-0.0363	0.001
6	-0.0036	-0.0016	0.04061	-0.001	0.03504	0.0008
7	-0.002	-0.0027	0.02795	0.05184	0.00338	0.001
8	-0.0073	-0.0055	0.00379	-0.0314	-4E-06	0.0011
9	-0.0136	-0.0119	0.00027	-1E-05	-4E-05	0.0015
10	-0.0135	0.00233	0.00021	-7E-05	-0.0001	0.0015
11	-0.0074	-0.0048	0.00034	-0.0006	1.7E-06	0.0015
12	-0.0197	-0.0048	-5E-05	0.00014	-2E-06	0.0015
13	-0.0135	-0.0048	0.00022	-0.0001	1.2E-05	0.0015
14	-0.0251	-0.0007	-4E-05	-6E-06	6.9E-06	0.0015
15	-0.0274	-0.0047	7.5E-06	-1E-05	2.3E-05	0.0015
16	-0.0251	-0.0088	7.8E-05	6.4E-06	1.1E-05	0.0015
№ диска	d _i (скорости диссипации для грунта)					
	1	2	3	4	5	6
1	17: 0	1:	2:			

		0.2082	0.0013				
2	15: 0.0013	16: 0.2082	18: 0				
3	17: 0	1: 0.2069	16: 0.2069	18: 0			
4	2: 0	17: 0	18: 0	15: 0			
5	3: 8E-14	4: 0	19: 0				
6	13: 9E-28	14: 3E- 26	20: 0				
7	2: 1E-13	15: 2E- 14	14: 6E- 15	3: 8E- 14	19: 0	20: 0	
8	4: 0	19: 0	20: 0	13: 0			
9	5: 0	6: 0	21: 0	24: 0			
10	11: 0	12: 0	22: 0	23: 0			
11	4: 0	13: 0	12: 1E- 16	5: 0	21: 0	22: 0	
12	6: 0	24: 2E- 17	23: 0	11: 0	7: 3.1E- 17	25: 0	10: 0
13	24: 6E-17	21: 0	22: 0	23: 0			
14	25: 0	10: 2E- 17	9: 0				
15	25: 0	9: 0	8: 1E- 18				
16	7: 0	25: 0	8: 0				

Скорости диссипации для плиты

№ линии, i	N _{i1} , МН/с	N _{i2} , МН/с
1: 17-1	0.015413426	0.024913091
2: 1-2	0	0
3: 2-17	0.003312189	0.087501784
4: 16-1	0	0
5: 15-16	0	0
6: 17-18	0.058967423	0.055373661
7: 18-15	0.034553705	0.037213576
8: 16-18	0.016927607	0
9: 2-15	0.097196461	0.026906326
10: 3-4	0	0
11: 14-3	0	0
12: 13-14	0.014928607	0
13: 19-3	0.008117327	0
14: 4-19	0.029767517	0.040877406
15: 19-20	0.025209735	0.114196722
16: 20-13	0.004305908	0.008481798
17: 14-20	0.016029322	0.008466551
18: 4-13	0.002825308	0.003141228
19: 5-6	0	0
20: 12-5	0	0
21: 11-12	0	0
22: 21-5	6.88445E-05	4.34656E-05
23: 12-22	9.98873E-05	2.36129E-05
24: 6-24	2.97527E-05	8.00262E-05
25: 23-11	7.09578E-05	4.89786E-05

26: 24-21	5.89886E-05	8.89818E-05
27: 21-22	3.62546E-05	9.74866E-05
28: 22-23	8.2177E-05	0.000264412
29: 23-24	0.000152586	0.000128328
30: 6-11	0	0
31: 7-25	8.00964E-05	8.01676E-06
32: 25-10	5.68125E-05	5.97794E-05
33: 25-9	1.22188E-05	3.68342E-05
34: 25-8	3.90557E-05	3.34501E-05
35: 7-8	0	0
36: 8-9	0	0
37: 9-10	0	0

Соответствующая эпюра скоростей диссипации приведена на рис. П.7.

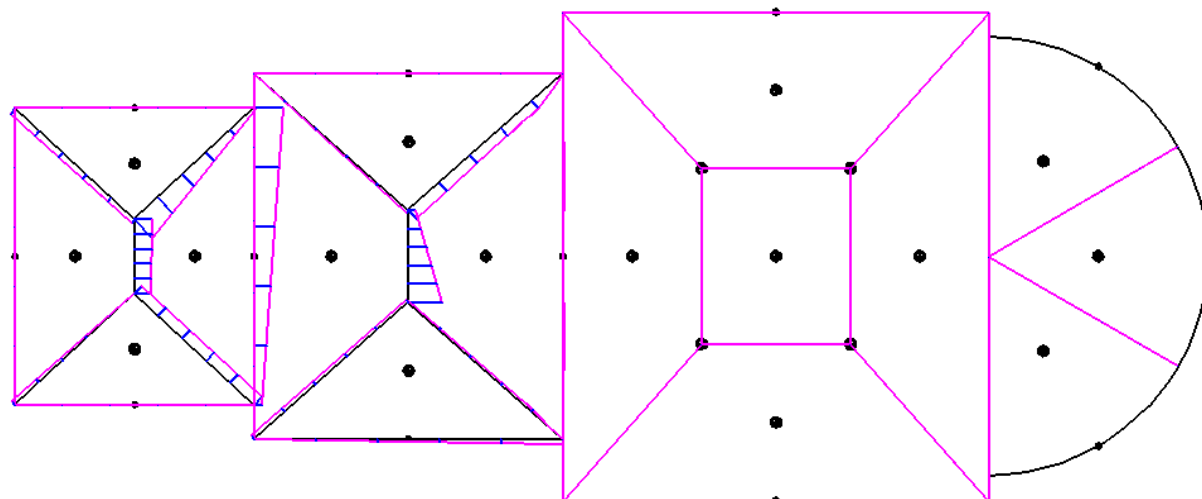


Рис. П.7

Разрушающая нагрузка для сечения 5-5 составила $4.381 \text{ МН} / 9,81 \text{ м/с}^2 / 14.04 \text{ м} = 31,81 \text{ т/м}$, что меньше чем эксплуатационная 34.8 т/м .

Для обеспечения запаса прочности, в центральной зоне между осями 1-2, Б-Д. Примем диаметр арматуры 22 мм. Получим следующие сечения гиперповерхности прочности (рис. П.8, штриховые линии, сплошные линии – для диаметра 12 мм).

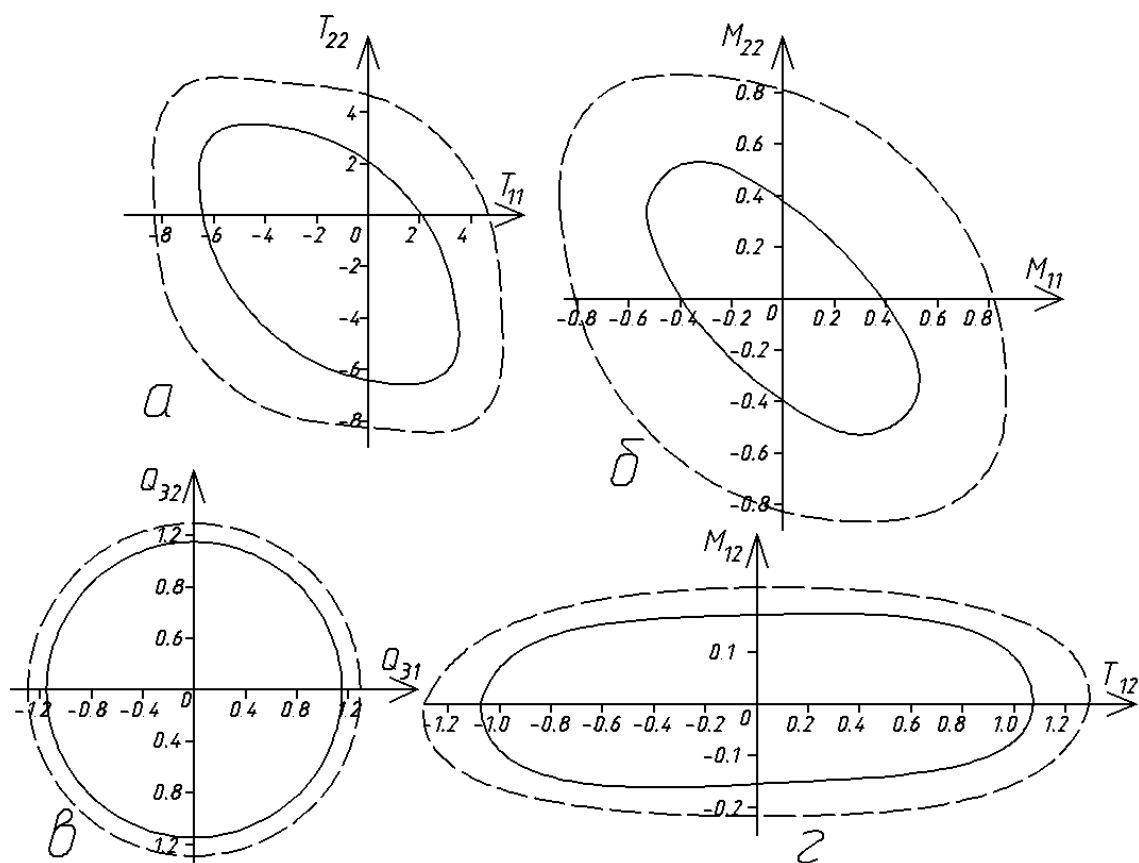


Рис. П.8

Для этого случая также решим задачу ЛП, получим таблицу результатов П.4.

Таблица П.4

min $\mu^+=4.92016371594623$							
№ диска	v_x , М/с	v_y , М/с	v_z , М/с	ω_x , с ⁻¹	ω_y , с ⁻¹	ω_z , с ⁻¹	
1	0.00792	-0.0025	-0.2283	0.1151	-0.1055	0.00744	
2	0.02071	-0.0098	-0.2091	0.1117	0.1087	0.00751	
3	0.02828	-0.0113	-0.3972	0.2301	-0.0001	6.1E-05	
4	-2E-05	-0.0001	-1E-05	-9E-07	-6E-06	8.1E-06	
5	-1E-04	-0.0001	-1E-05	-4E-06	1E-06	1.1E-05	
6	-6E-05	-9E-05	-2E-05	-4E-08	5E-05	5.9E-06	
7	2.9E-05	-6E-05	9.2E-06	5E-07	-6E-06	1.4E-05	
8	-9E-05	-0.0001	1E-06	-3E-07	-2E-08	9.8E-06	
9	-0.0002	-0.0001	0	0	0	9.8E-06	
10	-0.0002	-5E-05	5E-10	0	0	9.8E-06	
11	-0.0001	-0.0001	1.9E-10	-2E-10	0	9.8E-06	
12	-0.0002	-0.0001	0	0	0	9.8E-06	
13	-0.0002	-0.0001	0	-1E-10	0	9.8E-06	
14	-0.0002	-7E-05	0	0	0	9.8E-06	
15	-0.0003	-0.0001	0	0	0	9.8E-06	
16	-0.0002	-0.0001	0	0	0	9.8E-06	
№ диска	d _i (скорости диссипации для грунта)						
	1	2	3	4	5	6	7
1	17-0.016	1-0.21	2-0				
2	15-0	16-0.2	18-0.01				

3	17-0	1-0.21	16-0.21	18-0			
4	2-0	17-0	18-9E-7	15-0			
5	3-1.14E-5	4-9E-7	19-0				
6	13-3E-5	14-3E-5	20-0				
7	2-0	15-3E-7	14-0	3-2E-6	19-0	20-0	
8	4-0	19-0	20-0	13-0			
9	5-0	6-0	21-0	24-0			
10	11-0	12-0	22-0	23-3E-11			
11	4-0	13-0	12-0	5-0	21-0	22-0	
12	6-3E-12	24-0	23-0	11-0	7-3E-12	25-2E-12	10-2E-13
13	24-0	21-0	22-0	23-0			
14	25-2E-12	10-0	9-0				
15	25-0	9-0	8-0				
16	7-0	25-0	8-9E-13				

Скорости диссипации для плиты

№ линии, i	N _{i1} , МН/с	N _{i2} , МН/с
1: 17-1	0.073890032	0.027178026
2: 1-2	0	0
3: 2-17	0.027227807	0.073999133
4: 16-1	0	0
5: 15-16	0	0
6: 17-18	0.200220279	0.200055651
7: 18-15	0.074878331	0.024906143
8: 16-18	0.027982749	0.076260484
9: 2-15	9.89545E-07	9.89544E-07
10: 3-4	0	0
11: 14-3	0	0
12: 13-14	0.000246123	0.000132438
13: 19-3	3.98244E-06	6.69703E-07
14: 4-19	2.76624E-06	0.000145794
15: 19-20	4.08552E-05	0.000286731
16: 20-13	7.53753E-05	0.000129788
17: 14-20	0.000158369	0.00017871
18: 4-13	5.95358E-08	1.53033E-07
19: 5-6	0	0
20: 12-5	0	0
21: 11-12	0	0
22: 21-5	0	0
23: 12-22	0	0
24: 6-24	0	0
25: 23-11	1.01727E-10	1.13277E-10
26: 24-21	1.06324E-10	0
27: 21-22	0	1.17188E-10
28: 22-23	1.06365E-10	1.10601E-10
29: 23-24	1.75592E-10	1.79857E-10
30: 6-11	0	0
31: 7-25	0	0
32: 25-10	0	0
33: 25-9	0	0
34: 25-8	0	0

35: 7-8	0	0
36: 8-9	0	0
37: 9-10	0	0

Разрушающая нагрузка для сечения 5-5 составила $4.1689767 \text{ МН} / 9,81 \text{ м/с}^2 / 14.04 \text{ м} = 35.72 \text{ т/м}$, что больше чем эксплуатационная 34.8 т/м . На рис. П.9 приведены: эпюра скоростей диссипации (а), схема разрушения (б) и эпюра диссипации энергии грунта (в). Как видно из рисунка, картина разрушения существенно изменилась. Окончательно примем этот вариант армирования.

На рис. П.10 приведено решение аналогичной задачи в ПК «Лира 9 Windows». Здесь (а) – полученные изополя напряжений R_z , т/м и схема деформирования (темные зоны соответствуют напряжению), (б) – схема армирования в верхней зоне вдоль оси X (темные зоны соответствуют бóльшему диаметру арматуры). Согласно расчета в ПК «Лира 9 Windows», в центральной зоне между осями 1-2, Б-Д, а также между осями 3-4 (в местах опоры колонн) потребовалась арматура диаметром 28 мм, а согласно нашей методики – достаточно диаметра 22 мм. Схема разрушения плиты и продавливания грунта, полученные согласно нашей методике, хорошо сопоставляются с соответствующими результатами, полученными в ПК «Лира 9 Windows».

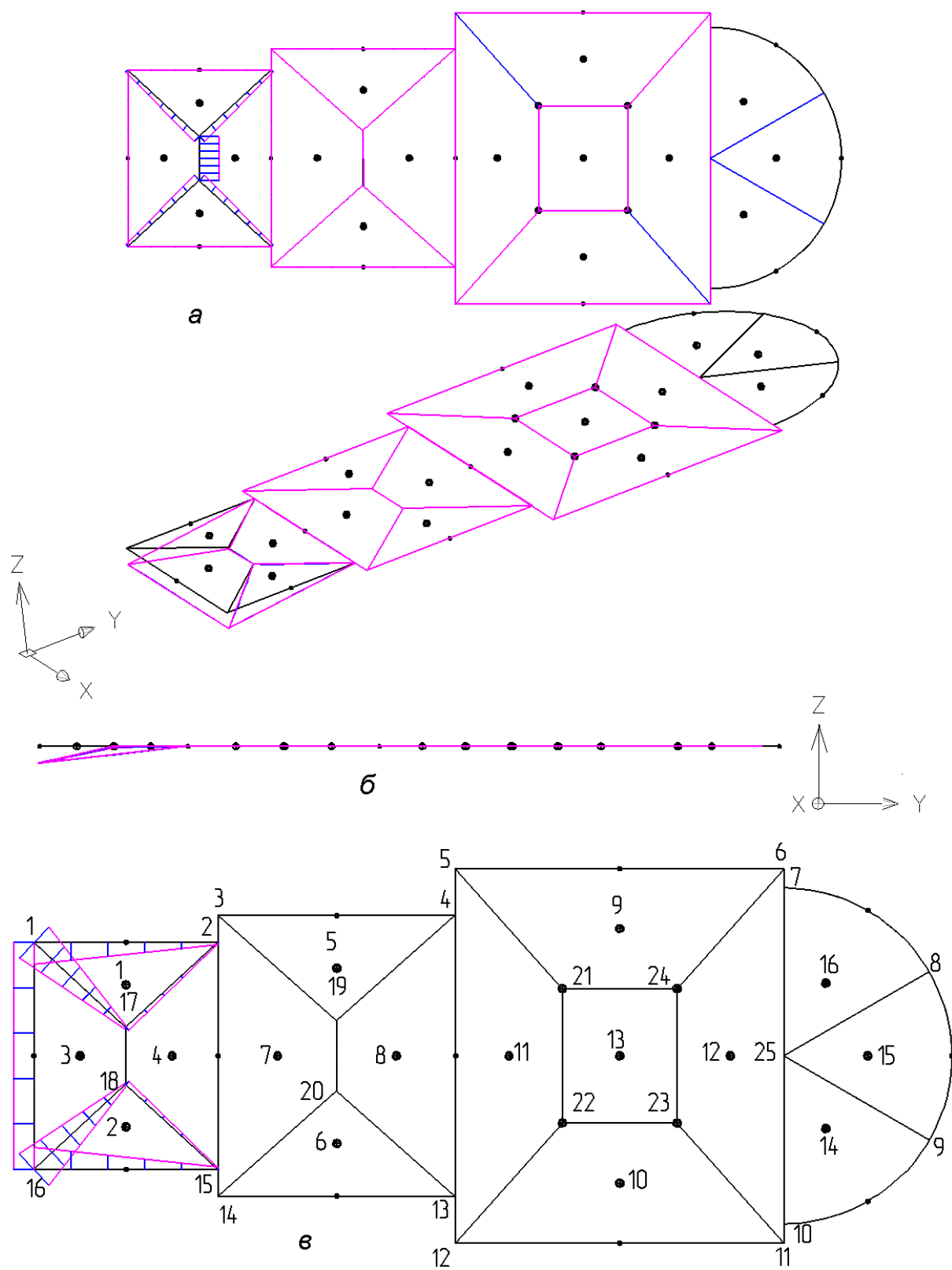


Рис. П.9

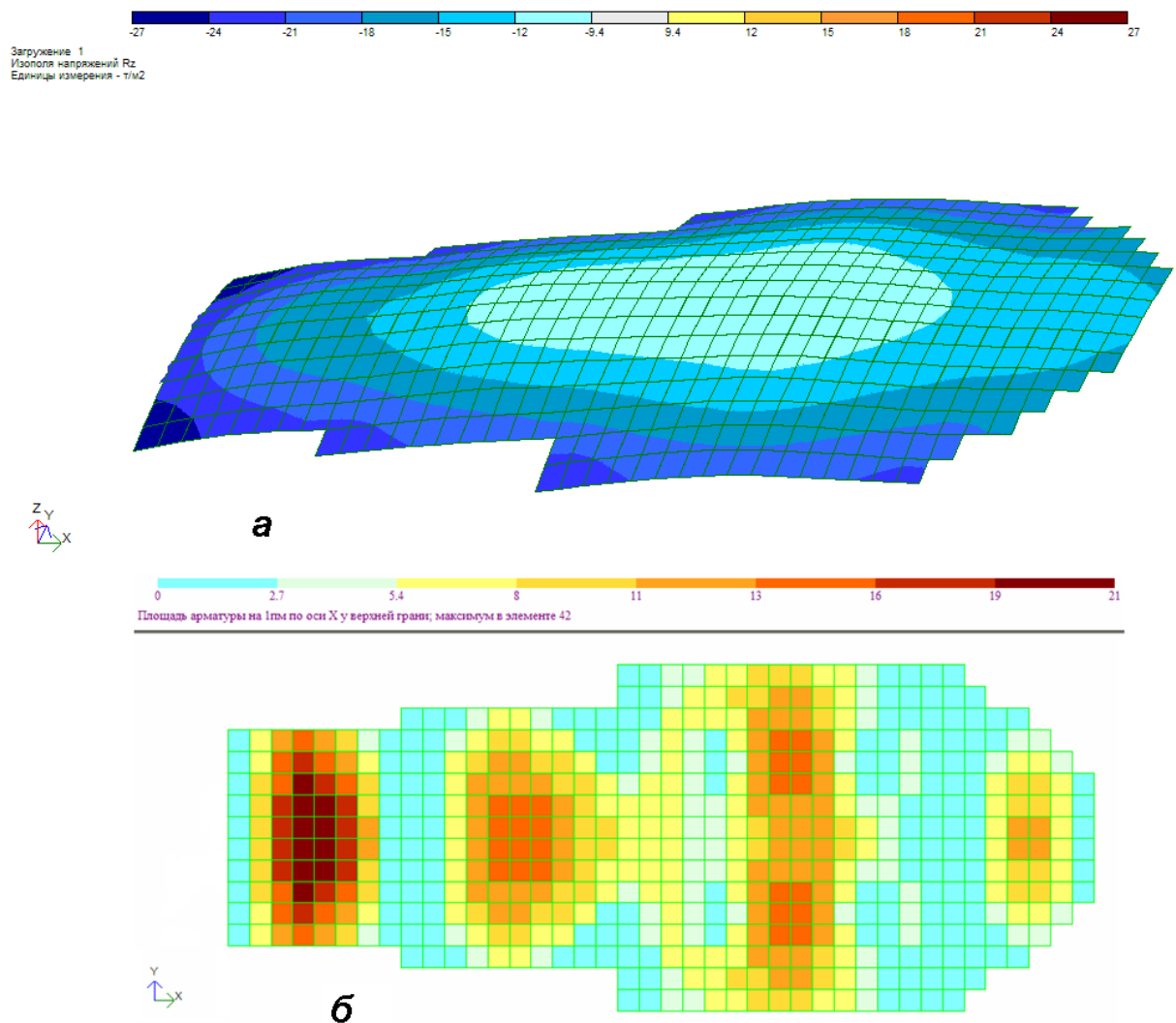


Рис. П.10